Årg. 36:1 Mars 1953

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

FÖRSTA HÄFTET

Olof Hanner, Vad är topologi? II 1
Gunnar Lindström, Nobelpriset i fysik 1952 13
Wilhelm Forsling, Om fördelningskromatografi. Nobelpriset i kemi 1952 17
V. Hugo Sanner, Enkel härledning av induktionslagen 27
Josef Andersson, Pythagoras' sats bevisad genom spegling 28
C. Bergholm, Atwoods fallmaskin 29
H. Skog†, Avståndet från en punkt till en rät linje 32
Erik Walles, Ohms andra lag 32
Harry Hellström, Modifierad apparat för molekylviktsbestämning enl. V. Meyer 34
Stig Lindholm, Enkel högspänningslikriktare 35
K. B. Mønsted, Pædagogisk forsøgsarbejde i naturlære i gymnasiet 36
Aktuellt: Tekniska Museets Atomarium; Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning; Industrikurs för kemilärare; Skandinavisk matematikerkongress; Åttonde nordiska kemistmötet 38
Notiser: Pipett med ventil; Färgade joners vandring i det elektriska fältet; Olika glassorters löslighet; Mangans oxidationstal; Klädnypa blir pincett; Lysplast; Kraftparallellogrammen 41
Bokanmälningar: se omslagets andra sida 45
Recensenter i detta häfte 58
Gradualavhandlingar (autoreferat): O. Hemer, On the Diophantine equation $y^2-k=x^3$; P. Häggmark, On a class of Diophantine equations in two unknowns; B. G. Rånby, Fine structure and reactions of native cellulose 58
Tidskrifter, innehållsöversikt 63
Problemavdelning:
Matematiska problem (red. S. Bågman) 63
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen januari 1953 67
Insänd litteratur (annonsblad vid sid. 41)

Annonsörer: Aulis Verlag; Almqvist &Wiksell; Grave; Industriens Upplysningstjänst (bilaga); Intram AB; Lindståhls Bokhandel (bilaga); Natur & Kultur; Norstedt & Söner (två annonssidor); Philips; Svenska Bokförlaget; Svenska Fysikersamfundet.

Pris pr år kr. 12:50 pr häfte kr. 3:50

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 12:50, pr häfte kr. 3:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Pärmar av grön klot à 2:50 + 20 öre i porto; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 äro flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14—30 tills vidare kr. 8:—, för 31—34 kr. 10:— och för årg. 35 kr. 12:50.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor Torsten Jönsson, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 0:80.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 1:60
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1:40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1:40.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 1:40.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.

Problemhäften för åren 1943—50 à kr. 1:—, för 1951 och 1952 à kr. 1:20. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar. För alla särtryck tillkommer 15 öre i porto.

Obs! Pärmar till årg. 33—34 (1951—1952) slutsålda. Nytillverkning först i höst, då pärmar till årg. 35—36 (1952—1953) även bli tillgängliga.

Forts. från föreg. sida.

Bokanmälningar: Kempthorne, The design and analysis of experiments; Anderson-Bancroft, Statistical theory in research; Goulden, Methods of statistical analysis; Vogel, Klassische Grundlagen der Analysis; Leman-Schoeneberg, Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie; Hardy-Littlewood-Polya, Inequalities; Blatt-Weisskopf, Theoretical nuclear physics; Seely-Smith, Advanced mechanics of materials; Ewald-Hintenberger, Methoden und Anwendungen der Massenspektroskopie; Friedel-Orchin, Ultraviolet spectra of aromatic compounds; Henney-Richardson, Principles of radio; Schelkunoff-Friis, Antennas: Theory and practice; Schelkunoff, Advanced antenna theory; Lönnqvist, En färd till månen; Gail, På spaning i världsrymden; Mahr, Anorganisches Grundpraktikum; Pullman, Les théories électroniques de la chimie organique; Lindhe, Handledning i experiment i fysik o. kemi för folkskolan; Hägg, Kemisk reaktionslära; Bendick, Elektronen människans tjänare; Atomic energy; Dagobert spränger atomen; Industriens Upplysningstjänst; Bateman, The formation of mineral deposits 45

Bilagor: Industriens Upplysningstjänst, Lindståhls bokhandel.

Två punkter att beakta

1. Rättelser till "Enklare matematiska uppgifter"

Med början i årg. 9 (1925—1926) har varje häfte av Elementa under rubriken »Enklare matematiska uppgifter» innehållit problem avsedda för skolstadiet. Trots omsorgsfull kontroll förekomma fel och oegentligheter. Några av dessa ha vid skilda tillfällen meddelats i tidskriften. Avsikten är nu att i årets septemberhäfte samla dessa rättelser. Läsarna ombedjas vänligen medverka till att göra dessa beriktiganden så fullständiga som möjligt genom att meddela red. upptäckta fel och brister.

Red. begagnar tillfället att rikta ett tack till alla dem som under årens lopp så beredvilligt bidragit med problem för denna avdelning. Den har flitigt utnyttjats av såväl lärare som elever och måste betraktas som en mycket betydelsefull avdelning i tidskriften.

Undersök Edra egna möjligheter att lämna bidrag till problemavdelningen som tack för vad den skänkt Eder själv. Även de »svårare uppgifterna» — tre i varje häfte — rekommenderas i Eder åtanke. Nya uppslag äro här välkomna.

2. Ett nytt inslag i Elementa

utgör den i detta häfte påbörjade avdelningen »Notiser».

Den appell som i senaste decemberhäfte riktades till läsekretsen har, som framgår av detta häfte, ej förklingat ohörd. Red. har mottagit dels ett antal kortare artiklar dels meddelanden i notisformat. De senare ha samlats i en avdelning som — i avsaknad av en mera expressiv benämning — fått den nämnda något torra rubriken »Notiser». Torrt kommer emellertid inte innehållet att bli, om red. i fortsättningen kan räkna med läsekretsens aktiva medverkan på samma sätt som skett vid starten. Notisavdelningen har då alla utsikter att bli både nyttig och nöjsam.

Frågor, förslag, kritik av vad som publicerats i tidskriften äro välkomna bidrag till denna avdelning, som på så vis även skulle kunna ge något i stil med de personligt färgade »Letters to the Editor», som på ett ofta så tilldragande sätt ge liv åt innehållet i engelskspråkiga tidningar och tidskrifter.

Stockholm i mars 1953

Red. av Elementa

Bildband från

NATUR OCH KULTUR

Fysik

FRÅN BLOSSET TILL GLÖDLAMPAN av lektor *J. Söderqvist* ..... 15:—
BESÖK PÅ EN GLÖDLAMPSFABRIK av lektor *J. Söderqvist* ..... 15:—
RÖNTGENSTRÅLARNA av lektor *J. Söderqvist* ..... 15:—
TELEFONEN av ingenjören vid Telegrafverket *R. Thorell* ..... 13:—

Teknik

GUSTAF DALÉN, en världsberömd svensk uppfinnare, av lektor *J. Söderqvist* 15:—
SVETSNING av lektor *J. Söderqvist* ..... 15:—
HUR EN KRAFTSTATION KOMMER TILL av redaktör *Bertil R. Gustafson* Kungl. Vattenfallsstyrelsen ..... 15:—

Astronomi

STJÄRNBILDER PÅ NORRA HIMLAVALVET ..... 15:—
HIMLAVALVETS DAGLIGA OCH ÅRLIGA FÖRÄNDRING ..... 15:—
MÅNEN, VÅR NÄRMASTE GRANNE I VÄRLDSRYMDEN ..... 15:—
EN FANTASIFÄRD TILL MÅNEN ..... 15:—
PLANETERNA ..... 15:—
EN BLICK UT I UNIVERSUM ..... 15:—

Under vårterminen utkommer:

KOMETER OCH METEORER
SOLEN
AVSTÅNDSBESTÄMNINGAR I VÄRLDSRYMDEN

Bildbanden i astronomi är utarbetade av lektor *C. G. Danver* tidigare verksam vid observatoriet i Lund.

Kemi

KEMISK BINDNING, en bildserie om atomer och molekyler ..... 15:—

Bilder ur kemins historia

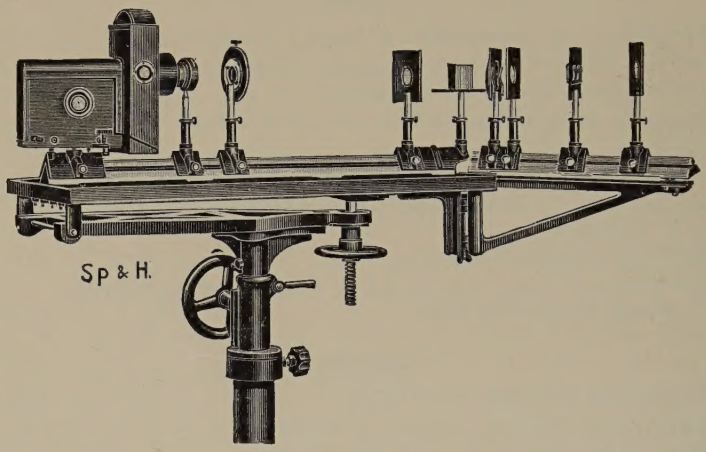
I. FRÅN ÄLDSTA TID TILL OMKRING 1750 ..... 15:—
II. FRÅN OMKRING 1750 TILL NUVARANDE TID ..... 15:—

Bildbanden i kemi är utarbetade av lektor *Bertil Englund*

Bokförlaget NATUR och KULTUR

Skolavdelningen — Torsgatan 31 — Stockholm Va

Den moderna optiska bänken, som anpassar sig efter tidens krav...



EXPERIMENTBORDET

har en praktisk uppgift att fylla och utgör en värdefull tillgång i den fysikaliska apparaturutrustningen. Alla tillbehör äro normaliserade, d. v. s. framställda med sådan noggrannhet att de sinsemellan passa, även om inköpen ske vid olika tidpunkter

Offerter och förslag lämnas av

RUDOLPH GRAVE A.-B.

STOCKHOLM 3

Vad är topologi? II

Av docent Olof Hanner, Stockholm

Vi har studerat en del geometriska figurer, sammansatta av kurvor och ytstycken.[1] Två figurer har vi ansett som ekvivalenta, om det finns en topologisk avbildning av den ena på den andra, dvs. om punkterna i de båda figurerna kan sättas i enentydig punkt-för-punkt-motsvarighet, så att närbelägna punkter svarar mot närbelägna. Två punkter anses härvid ligga nära varandra, om avståndet mellan dem är litet.

Nu har man ofta inom matematiken att göra med objekt, som liksom punkterna i en figur är mer eller mindre »nära» varandra.

Exempel A. I ett plan betraktas linjerna genom en fast punkt. Två linjer anses ligga »nära» varandra, om vinkeln mellan dem är liten.

Exempel B. Vi betraktar polynom $P(x)=a_n x^n+\ldots+a_0$ av godtyckligt gradtal. Av någon anledning är vi endast intresserade av sådana x för vilka $0\leqq x\leqq 1$. Vi skall därför anse två polynom vara »nära» varandra, om de för dessa x-värden antager funktionsvärden, som ligger nära varandra (fig. 1).

När man på detta sätt har en samling av objekt, som är mer eller mindre »nära» varandra, är det ofta praktiskt att införa ett geometriskt uttryckssätt. Man sammanfattar alla objekten ifråga och kallar det erhållna ett rum och själva objekten rummets punkter. Ett exempel på ett rum utgör alltså alla linjerna genom en fast punkt (ex. A). Var och en av dessa linjer uppfattas därvid som en punkt i rummet. Ett annat exempel bildas av alla polynom (ex. B). En geometrisk figur (t. ex. cirkel, torus, Möbius' band) är också ett rum. De objekt, som här utgör punkterna i rummet, är figurens punkter, ordet punkt taget i dess vanliga betydelse.

Exempel C. På en fast cirkel tages godtyckligt två punkter, olika eller sammanfallande, utan inbördes ordning. Alla sådana punktpar tar vi samman till ett rum. Två punktpar ligger »nära» varandra, om man endast behöver flytta punkterna i det ena paret litet för att komma till det andra paret.

[1] Elementa 35 (1952), 157.

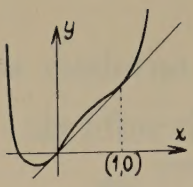


Fig. 1.

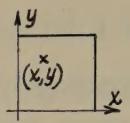


Fig. 2.

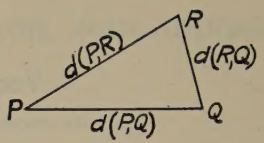


Fig. 3.

Fig. 1. För stora n ligger denna kurva $y=x+x^{2n}(x-1)^{2n}$ nära linjen $y=x$ för alla x i intervallet $0\leqq x\leqq 1$.

Fig. 2. Man betraktar endast de punkter i kvadraten för vilka x och y är irrationella.

Fig. 3. $d(P, Q)\leqq d(P, R)+d(R, Q)$.

Exempel D. Inför i ett plan på vanligt sätt ett koordinatsystem. Bilda ett rum av alla punkter (x, y) för vilka $0<x<1$, $0<y<1$, x och y båda irrationella. Punkterna ligger i en kvadrat (fig. 2). Någon riktigt åskådlig bild kan man inte få av detta rum, fastän rummets punkter är punkter i vanlig mening.

För två punkter P och Q i en geometrisk figur är avståndet mellan dem, $d(P, Q)$, ett mått på hur nära varandra punkterna ligger. Avståndet uppfyller följande axiom:

a) $d(P, Q)>0$ för $P\neq Q$ och $d(P, P)=0$
b) $d(P, Q)=d(Q, P)$
c) $d(P, Q)\leqq d(P, R)+d(R, Q)$

Axiom c) utsäger, att i en triangel är summan av två sidor större än den tredje (fig. 3). Det kallas därför triangelolikheten.

För att precisera begreppet »nära» för punkterna i ett rum vill vi även för dem införa ett slags avstånd. Detta går att göra i samtliga exempel A—D. För två godtyckliga punkter P och Q skall vi då definiera ett tal $d(P, Q)$, så att nyssnämnda axiom är uppfyllda. För att bibehålla det geometriska uttryckssättet kallar vi $d(P, Q)$ även i

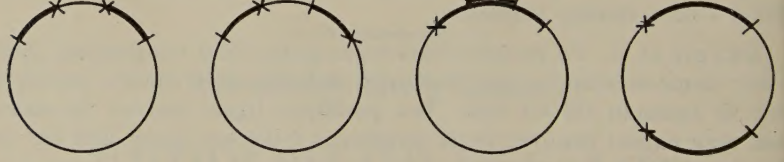


Fig. 4. Avståndet mellan punktparet markerat med kryss (××) och det markerat med tvärstreck är summan av de markerade båglängderna.

detta fall avståndet mellan P och Q. Man kallar avståndsfunktionen d en metrik och ett rum med metrik ett metriskt rum. I ex. A låter vi helt enkelt $d(P, Q)$ vara storleken av vinkeln (den minsta) mellan linjerna P och Q, vinkeln mätt i något mått, grader eller radianer. I ex. B tar vi största skillnaden mellan $P(x)$ och $Q(x)$ för x i intervallet (0, 1). I ex. C tar vi summan av de båglängder, som det är nödvändigt att flytta de båda punkterna i det ena paret för att komma till det andra (fig. 4). Slutligen i ex. D låter vi $d(P, Q)$ beteckna det vanliga avståndet. — Att axiomen är uppfyllda i alla dessa fall kan lätt visas. Tag t. ex. axiom c) för ex. C. Vi har då tre punktpar P, Q och R på cirkeln. Enligt definitionen av $d(P, R)$ och $d(R, Q)$ är det möjligt att flytta paret P först till paret R och så till paret Q över båglängder vars summa är $d(P, R)+d(R, Q)$. Men $d(P, Q)$ är ju summan av båglängderna vid den kortaste förflyttningen av paret P till paret Q. Alltså måste axiom c) gälla.

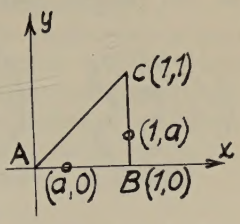


Fig. 5. AB skall identifieras med BC.

Exempel E. Betrakta den triangel som visas i fig. 5. Vi vill här identifiera AB med BC. Därvid skall för varje a mellan 0 och 1 punkten $(a, 0)$ identifieras med punkten $(1, a)$. I stället för att deformera figuren och sammanfoga de identifierade punkterna (vi skall senare återkomma till vad man då får) bildar vi helt enkelt ett rum, vars punkter är triangelns punkter med det undantaget att två identifierade punkter på triangelns kortsidor utgör en enda punkt i rummet. Vi definierar en metrik med figurens hjälp; $d(P, Q)$ skall beteckna längden av kortaste »vägen» mellan punkterna P och Q (fig. 6).

Vi skall så småningom definiera vad vi menar med en topologisk avbildning av ett rum på ett annat. Men först behöver vi två begrepp: delmängd och omgivning.

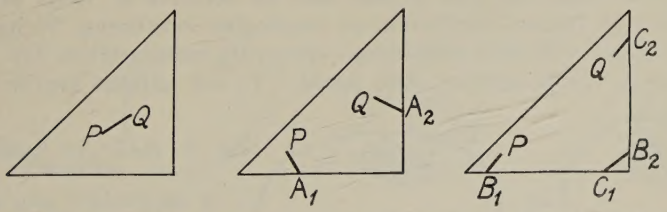
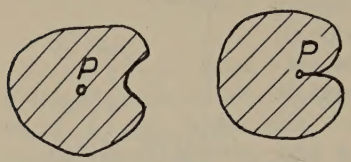


Fig. 6. Några exempel på kortaste »vägen» mellan två punkter P och Q. En sådan »väg» kan gå över ett eller flera par av identifierade punkter; »vägen» mellan två identifierade punkter har längden 0.

Om man i ett rum tar en del av punkterna, så säger man att man har en delmängd av rummet. Så är t. ex. en cirkelskiva, som ligger i ett plan, en delmängd av planet. Likaså utgör alla punkterna i ex. D en delmängd av planet. En delmängd av rummet i ex. B kan vi få t. ex. genom att ta alla polynom, som för $x=\frac{1}{2}$ antager ett positivt värde.

En delmängd U av ett metriskt rum kallas en omgivning till punkten P, om den omsluter P på följande sätt: Det skall finnas ett positivt tal a, så att alla punkter Q för vilka $d(P,Q)<a$, tillhör U. För övrigt får U vara hurudan som helst. En omgivning kan alltså mycket väl innehålla punkter, som ligger långt bort från P. Det väsentliga är, att alla punkter, som ligger nära P, tillhör den; att man åskådligt



a. b.

Fig. 7. En punkt P i ett plan.
a. Detta är en omgivning till P.
b. Detta är inte en omgivning till P.

talat inte kan komma fram till P utan att komma in i omgivningen (fig. 7). Eftersom $d(P,P)=0<a$, måste varje omgivning till P innehålla P.

Ett speciellt slag av omgivningar erhåller vi genom att för något tal a ta alla punkter Q för vilka $d(P,Q)<a$ (och inga ytterligare punkter). En sådan omgivning kallas en sfärisk omgivning (ty i det fall, då rummet är den tredimensionella rymden, är den det inre av en sfär med radien a och medelpunkt P). En delmängd är tydligen en omgivning till P, om den innehåller en sfärisk omgivning.

Varför studera vi då omgivningar? Låt oss gå till den åskådliga »gummibandsgeometrin». Vid en deformation ändras ju avstånden mellan punkterna. Men observera att en omgivning till en punkt alltid förblir en omgivning, hur mycket man än deformerar. Detta är bakgrunden till följande definition av topologisk avbildning. Vi har två rum X och Y och sätta punkterna i enentydig motsvarighet, dvs. varje punkt i X svarar mot en enda punkt i Y, och omvänt svarar varje

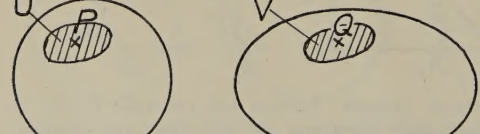


Fig. 8. U är en omgivning till P.
V är de punkter som svarar mot punkterna i U; Q svarar mot P. Då skall V vara en omgivning till Q.

punkt i Y därvid mot en enda punkt i X. Vi kallar då denna motsvarighet en topologisk avbildning av X på Y (eller en topologisk ekvivalens mellan X och Y), om även omgivningarna svarar mot varandra, så att om U är en godtycklig omgivning till en punkt P i ett av rummen (fig. 8), så bildar i det andra rummet de punkter, som svarar mot punkterna i U, en omgivning till den punkt, som svarar mot P.

För det fall då rummen är geometriska figurer kan denna definition visas överensstämma med den definition, som gavs i föregående artikel. De exempel på ekvivalenta figurer och de exempel på icke ekvivalenta figurer, som där gavs, är alltså också exempel på ekvivalenta respektive icke ekvivalenta rum enligt den nu givna definitionen.

För att visa att en viss enentydig punkt-för-punkt-motsvarighet mellan två rum är en topologisk avbildning skall vi visa, att varje omgivning i ett av rummen svarar mot en omgivning i det andra rummet. Men en omgivning är en delmängd, som innehåller en sfärisk omgivning. Vi behöver därför endast visa att varje sfärisk omgivning svarar mot en delmängd, som innehåller en sfärisk omgivning.

Låt oss visa, att rummen i ex. C och ex. E är topologiskt ekvivalenta. Tages på cirkeln i ex. C en fast punkt H som utgångspunkt, kan man för varje punkt P ange ett tal, nämligen kvoten mellan båglängden HP (räknad från H motsols) och hela cirkelns båglängd (fig. 9). Ett punktpar på cirkeln kommer därför att svara mot två tal mellan 0 och 1. Kalla det största av dem x och det minsta y. Vi får då en punkt (x, y) i triangeln i fig. 5. Punkten H svarar mot 0 eller 1, och därför svarar ett punktpar där ena punkten är H mot $(a, 0)$ eller $(1, a)$, dvs. mot en enda punkt i rummet i ex. E. Låt oss slutligen visa att en sfärisk omgivning i något av rummen alltid motsvaras i det andra rummet av en delmängd, som innehåller en sfärisk omgivning. Vi

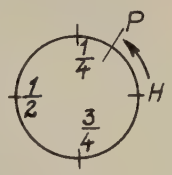


Fig. 9. Varje punkt på cirkeln tilldelas ett tal mellan 0 och 1.

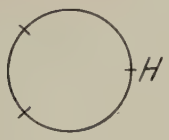
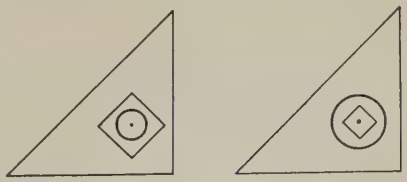


Fig. 10.

Ex. C.



Ex. E.

Kvadraten är motsvarigheten till en sfärisk omgivning i Ex. C. Cirkeln är en sfärisk omgivning.

genomför resonemanget för ett punktpar, där ingendera punkten är H. En sfärisk omgivning till punktparet motsvaras (för tillräckligt små a) av en kvadratisk skiva (fig. 10), en sfärisk omgivning av motsvarande punkt i triangeln är en cirkelskiva. Nu fullbordas lätt beviset med hjälp av det faktum, att varje sådan kvadrat innehåller en liten cirkel, och att varje cirkel innehåller en sådan liten kvadrat.

Utför man identifieringen i ex. E erhålles ett Möbius' band. Detta inser man lättast genom att först skära upp triangeln (fig. 11). Alltså har vi visat att punktparen på en cirkel bilda ett rum, som är topologiskt ekvivalent med ett Möbius' band.

Vi säger som förut att en egenskap hos ett rum är topologisk, om den bibehålles vid topologiska avbildningar. Eftersom det endast beror på omgivningarna i ett rum, vilka topologiska avbildningar man kan göra av rummet, kan de topologiska egenskaperna också karakteriseras som sådana som endast beror på omgivningarna i rummet.

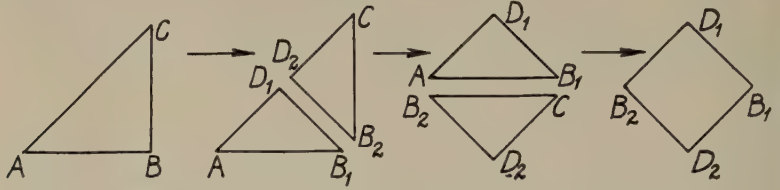


Fig. 11. Identifieringen av AB med BC ersättes med en identifiering av B_1D_1 med B_2D_2.

Liksom för geometriska figurer kan vi för godtyckliga rum definiera vad vi menar med sammanhang. Denna definition sker med hjälp av omgivningarna och, som just sagts, medför detta att sammanhang är en topologisk egenskap. Betrakta följande två rum: X, som är en rät linje, och Y, som är en rät linje, varifrån en punkt tagits bort. Som metrik tar vi i båda fallen det vanliga avståndet. Vår definition skall göras så, att X är sammanhängande men inte Y. Vari ligger då skillnaden? Y kan på ett »naturligt» sätt delas upp i två delmängder, så som visas i fig. 12 b. En uppdelning av rummet X (hela linjen) i två delmängder visas i fig. 12 a, men denna uppdelning är inte lika »naturlig». Punkten A tillhör här högra halvlinjen, men på linjen finns det punkter på vänstra halvlinjen nära A; varje omgivning till A innehåller punkter på vänstra halvlinjen. Någon sådan punkt finns inte i fig. 12 b. En punkt på ena halvlinjen omges här helt och hållet av punkter, som ligger på samma halvlinje, dvs. båda halvlinjerna har den egenskapen att vara omgivning till var och en av sina punkter. Den stränga definitionen av sammanhang är den: Ett rum kallas sammanhängande, om det inte är möjligt att dela

Fig. 12 a. En rät linje delad i två halvlinjer varvid delningspunkten A tilldelats högra halvlinjen.

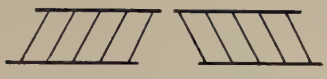


Fig. 12 b. En rät linje varifrån en punkt tagits bort. Detta rum är uppdelat i sina två halvlinjer.

upp rummets punkter i två delmängder båda med den egenskapen att vara omgivning till var och en av sina punkter. Att en rät linje (liksom ett intervall) är sammanhängande enligt denna definition är i själva verket en djup sats, som endast kan bevisas på grundval av en ordentlig teori för irrationaltal (eller motsvarande stränga axiom i geometrin).

Eftersom sammanhang är en topologisk egenskap, är varje topologisk bild av ett intervall sammanhängande. Om ett rum är sådant att två godtyckliga punkter i rummet kan sammanbindas med en båge, dvs. en topologisk bild av ett intervall, kallas det bågvis sammanhängande. Alla bågvis sammanhängande rum är sammanhängande. De exempel på sammanhängande rum, som vi mötte i föregående artikel, var alla bågvis sammanhängande. Ett sammanhängande men inte bågvis sammanhängande rum ges i fig. 13.

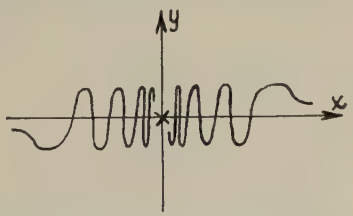


Fig. 13. Rummet består av punkterna på kurvan $y=\sin\frac{1}{x}$ för $x\neq 0$ och punkten $(0,\ 0)$.

Rummet i ex. B är bågvis sammanhängande. Ty låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara två olika punkter och sätt $R_t(x)=P(x)+t(Q(x)-P(x))$. För varje fast t-värde i intervallet $0\leqq t\leqq 1$ är $R_t(x)$ ett polynom, dvs. en punkt i rummet. För $t=0$ är $R_0(x)=P(x)$ och för $t=1$ är $R_1(x)=Q(x)$. Då t går från 0 till 1, rör sig $R_t(x)$ från $P(x)$ till $Q(x)$. Eftersom två t-värden, t_1 och t_2, nära varandra svarar mot två punkter $R_{t_1}(x)$ och $R_{t_2}(x)$ nära varandra, har vi en båge mellan $P(x)$ och $Q(x)$. Rummet är alltså bågvis sammanhängande.

Exempel F. En och samma samling av objekt kan mycket väl läggas till grund för olika rum genom att man med olika metriker inför olika närhetsbegrepp. Tag därför som i ex. B alla polynom. Antag att vi nu är intresserade av alla x-värden (inte bara x-värden i intervallet $(0, 1)$ som i ex. B). Vi vill därför anse $P(x)$ och $Q(x)$

nära varandra, om $P(x)-Q(x)$ är liten för alla x. Detta är nu möjligt, endast om denna skillnad är en konstant (oberoende av x). I så fall, och om denna skillnad (tagen positiv) är mindre än 1, tar vi den som ett nytt avstånd $d_1(P(x), Q(x))$ mellan $P(x)$ och $Q(x)$. I alla andra fall sätter vi $d_1(P(x), Q(x))=1$. Detta rum kan beskrivas så: De punkter som erhålles från en fast punkt $P(x)$ genom tillägg av en konstant a beror på denna storhet a; de bildar topologiskt sett en linje. Punkter på olika sådana linjer har avståndet 1 från varandra. Linjerna ligger alltså isolerade från varandra. Rummet är inte sammanhängande.

Rummet i ex. D är fullständigt osammanhängande. Därmed menar vi, att rummet självt är osammanhängande och att varje delmängd av rummet är osammanhängande (utom om den består av endast en punkt). Låt a vara ett rationellt tal mellan 0 och 1. Inga punkter (x, y) i vårt rum har x-koordinaten a. Linjen $x=a$ delar därför rummets punkter i två delmängder (fig. 14). Man inser lätt, att vardera del-

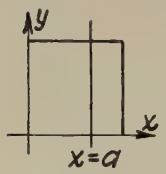


Fig. 14. Ingen punkt i ex. D har x-koordinat a, då a är rationellt. Linjen $x=a$ delar därför rummet i två delar, vardera en omgivning till alla sina punkter.

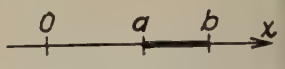


Fig. 15. En omgivning till a skall innehålla ett intervall åt höger.

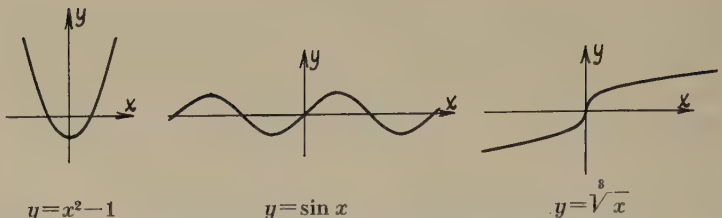
mängden är en omgivning till var och en av sina punkter. Härav kan man därför sluta, att en sammanhängande delmängd inte kan ha punkter med olika x-värden; vi skulle annars kunna dela upp den med en linje $x=a$, för något lämpligt a-värde. Genom motsvarande resonemang inses, att den inte heller kan innehålla punkter med olika y-koordinat. Den måste alltså bestå av endast en punkt.

De rum, som vi hittills har betraktat, har varit metriska rum; »närhet» har fastlagts med hjälp av en metrik. På grundval av denna metrik har vi definierat omgivningar, och med hjälp av dem de topologiska avbildningarna. Emellertid kan man också fastlägga närhet genom att direkt ange för varje punkt vilka delmängder av rummet, som är punktens omgivningar. Ty har vi blott omgivningarna definierade, kan vi definiera topologiska avbildningar som förut, och därigenom blir bestämt, vilka topologiska egenskaper rummet har. Har vi på något sätt angivit omgivningarna (direkt eller med hjälp av en metrik), säger vi att vi har givit rummet en topologi och kallar rummet ett topologiskt rum.

Exempel G. Låt oss bland punkterna på en linje införa en annan topologi än den vanliga. Vi uppfattar linjen som en x-axel (fig. 15). Som omgivning till en punkt a tar vi varje delmängd av rummet (=linjen), som innehåller ett intervall av formen $a \leqq x \leqq b$, där b är ett godtyckligt tal $> a$. Löst formulerat: Vill man närma sig punkten a, måste man komma från höger. Följden av punkter $a-1$, $a-\frac{1}{2}$, $a-\frac{1}{3}$, ... närmar sig alltså inte a i detta topologiska rum. Det finns ju omgivningar, t. ex. intervallet $a \leqq x \leqq a+1$, som inte innehåller någon av punkterna i denna följd. Däremot närmar sig $a+1$, $a+\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{3}$, ... punkten a. Detta rum är inte sammanhängande. Ty den uppdelning, som visas i fig. 12 a, är nu en uppdelning i två delmängder, som vardera är omgivning till var och en av sina punkter. Speciellt är högra halvlinjen en omgivning till A.

Även om omgivningarna i ett rum är direkt angivna, kan det naturligtvis tänkas, att de kan anges med hjälp av någon lämpligt vald metrik. Om detta är fallet, säges rummet vara metriserbart. Egenskapen hos ett rum att vara metriserbart är topologisk. Rummet i ex. G är inte metriserbart; man kan visa att det inte finns någon metrik, som ger just dessa omgivningar.

Exempel H. Låt oss ändra ex. G så, att vi endast tar de punkter på x-axeln, vars koordinat är rationell och alltså kan skrivas på formen $\pm\frac{p}{q}$, där p är ett positivt heltal eller 0, och q är ett positivt heltal, och där p och q inte har någon gemensam heltalsfaktor. Bland dessa punkter definierar vi omgivningar som förut: En omgivning till punkten a skall innehålla alla rationella x i ett intervall $a \leqq x \leqq b$ för något $b > a$. Detta rum är metriserbart. Ty låt oss för två godtyckliga rationella tal x_1 och x_2, där $x_1 < x_2$, studera alla rationella x för vilka $x_1 < x \leqq x_2$. Varje sådant x kan skrivas på formen $\pm\frac{p}{q}$. Välj det minsta tal q som förekommer som nämnare för något av dessa tal, och sätt $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = \frac{1}{q}$. T. ex. $d\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $d(1, \frac{1}{2}) = 1$, $d\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$. Man skall nu visa att denna metrik satisfierar axiomen för en metrik, och att de omgivningar som den definierar är de riktiga. Men låt oss här blott konstatera, att varje punkt b till vänster om punkten $a = \frac{p_1}{q_1}$ har ett avstånd $\geqq \frac{1}{q_1}$ till a. Ty a är själv ett rationellt x-värde sådant att $b < x \leqq a$. Alltså är minsta q-värdet för dessa



$y=x^2-1$ $y=\sin x$ $y=\sqrt[3]{x}$

Fig. 16. Tre exempel på kontinuerlig avbildning av x-axeln på y-axeln.

x-värden säkert $\leqq q_1$ och $d(a,b)\geqq\frac{1}{q_1}$. För $b>a$ däremot är $d(a,b)$ godtyckligt litet blott b är tillräckligt nära a.

De topologiska rummen utgör grundstenen för all topologi. Topologi är teorin för dylika rum, för deras egenskaper och för relationer mellan dem. Vi har sett exempel på topologiska rum (de geometriska figurerna i föregående artikel, exempel A—H i denna artikel) och studerat några av deras egenskaper. Den topologiska avbildningen av ett rum på ett annat är ett exempel på en relation mellan två rum. Den är ett specialfall av det allmännare begreppet, den kontinuerliga avbildningen.

En kontinuerlig funktion eller avbildning f av ett rum X på ett rum Y definieras på följande sätt: För varje punkt P i X tages i Y en punkt, betecknad $f(P)$ och kallad funktionsvärdet i punkten P eller, med ett geometriskt uttryckssätt, punkten P:s bildpunkt. (Ingenting hindrar att två olika punkter i X har samma bildpunkt i Y, ej heller behöver varje punkt i Y vara bildpunkt för någon punkt i X.) Vi fordrar vidare kontinuitet, dvs. »närbelägna» punkter i X skall avbildas på »närbelägna» punkter i Y. Den exakta formuleringen är den: För varje P i X skall gälla, att om U är en omgivning till $f(P)$ i Y, så skall de punkter i X, vilkas bildpunkter ligger i U, utgöra en omgivning till P. Om X och Y är två linjer (eller delar av linjer), erhålles de kontinuerliga funktioner, som ges i den elementära analysen. En sådan funktion kan åskådliggöras med en sammanhängande kurva i ett koordinatplan. Som några exempel kan vi ta: $y=x^2-1$, $y=\sin x$, $y=\sqrt[3]{x}$ (fig. 16). Ett annat exempel på kontinuerlig avbildning är den rätvinkliga projektionen på ett plan av någon figur i rymden.

Låt oss behandla ett enkelt problem i vars lösande ingår en kontinuerlig funktion. I ett plan ligger två sammanhängande ytstycken A och B. Finns det en linje som delar båda ytorna mitt itu? Svaret

a. b.

Fig. 17. a. Cirkeln X.
b. Ytstyckena A och B (B streckad).

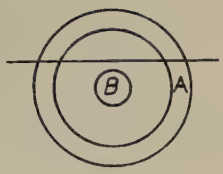


Fig. 18. Ingen linje, som delar A i förh. 1 : 2, skär B.

är ja. Vi kan inse detta så. Tag en cirkel med en medelpunkt O. Vi kallar den X. Tag för varje punkt P på cirkeln, som fig. 17 visar, den linje, som är vinkelrät mot PO, och som delar A mitt itu. Denna delar B i två eller flera delar, C och D, där C betecknar de delar som ligger på den sida om linjen, som anges av riktningen från O till P, och D de övriga. När P rör sig på X, vrider sig linjen. Frågan är, om det finns något läge för vilket ytan av C=ytan av D. Bilda $f(P)$=ytan av C−ytan av D. Då är $f(P)$ ett tal, som beror på P, dvs. vi har en funktion. Denna kan visas vara kontinuerlig; två punkter P som ligger nära varandra ger ju två linjer med liten vinkel emellan. Alltså är $f(P)$ en kontinuerlig funktion eller avbildning av X på de reella talen. Frågan är: Är $f(P)=0$ för något P? Två diametralt belägna punkter P_1 och P_2 på X ger samma linje, och så som C och D är bestämda, får vi $f(P_1)=-f(P_2)$. Funktionen kan alltså inte vara positiv för alla P; ej heller kan den vara negativ för alla P. Att den verkligen är 0 för något P följer nu av att cirkeln är sammanhängande. De punkter på X, där f är positiv, bildar nämligen på cirkeln en delmängd, som är en omgivning till alla sina punkter. Ty är f positiv i en punkt, är den positiv i en omgivning (därför att den är kontinuerlig). Likaså bildar de punkter, där f är negativ, en likadan delmängd. Om nu f aldrig vore noll, skulle vi därför ha en uppdelning av rummet X, som skulle strida mot att X är sammanhängande.

Observera att om vi vill ha något annat delningsförhållande än mitt itu, kan vi inte alltid finna någon linje (fig. 18).

Ett liknande problem är skinksmörgåsproblemet. En skinksmörgås bestående av bröd, smör och skinka skall delas med ett plant snitt (med en kniv t. ex.) så att alla tre ingredienserna delas mitt itu. Detta är alltid möjligt.

Topologins roll i lösandet av föregående problem är typisk. Problemställningen är inte av topologisk art; den handlar om räta linjer och

halvering av ytstycken. Men vi överför problemet på en egenskap hos funktionen f, den att vara 0 i någon punkt. För att visa den behöver vi känna mycket litet om f, nämligen att den är kontinuerlig, och att den, om den inte alltid är 0, måste antaga både positiva och negativa värden. Vi har kunnat avstå från detaljkännedom om funktionen f, och ha därigenom lyckats genomföra ett bevis för alla tänkbara ytstycken A och B, oavsett deras form och läge.

Topologin utgör, som vi har sett, ett studium av begreppet närhet och av sådana egenskaper, som beror på detta begrepp, såsom exempelvis sammanhang, orienterbarhet och kontinuitet. Den har vuxit fram ur olika grenar av matematiken och innebär en sammanfattning av den typ av bevisargument, där närheten spelar den avgörande rollen. Många av topologins begrepp utgör sålunda väsentligen endast naturliga generaliseringar av välkända begrepp: Den allmänna kontinuerliga funktionen är en generalisering av den inom analysen använda kontinuerliga funktionen av en eller flera reella variabler (jfr fig. 16); det metriska rummet är en generalisering av den vanliga tredimensionella rymden, där avståndet ju är en metrik.

När man behandlar ett problem med topologins hjälp, bortser man för ögonblicket från alla andra detaljer än dem som beror på närheten. Det kan kanske synas egendomligt att något kan vinnas genom att man bortser från detaljer hos det man studerar. Men dels kan dessa detaljer vara mycket komplicerade, som t. ex. ytstyckenas utseende i vårt sista exempel; med topologins hjälp erhåller man alltså en förenkling. Dels slipper man också upprepningar; om dessa detaljer är överflödiga för problemets lösande blir resultatet giltigt även när de är annorlunda men problemställningen för övrigt densamma.

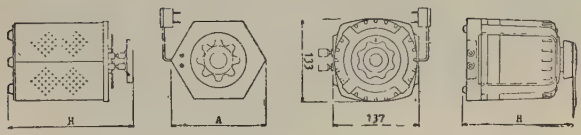
Topologin är en relativt ung gren av matematiken. Även om en del problemställningar går längre tillbaka i tiden (exempelvis Königsbergproblemet), påbörjades den systematiska utforskningen först i början av detta århundrade.

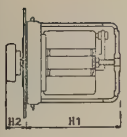
PHILIPS vridtransformatorer

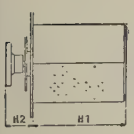
ge kontinuerlig och praktiskt taget förlustfri spänningsreglering

Bordstransformatorerna i storlekar t.o.m. 1040 VA ha smältsäkringar i kontaktarmsledningen; de övriga storlekarna sakna inbyggd säkring. Utspänningen är variabel antingen mellan 0 V och nätspänningen, eller mellan 0 V och 20 % över nätspänningen.

Transformatorer av bordstyp







Nätspänning V	Effekt VA ·	Dimensioner i mm					Sekundärstr. A
		A	H	A1	H1	H2	
110	360	–	165	–	130	30	2,8
110	730	–	185	–	150	30	5,5
130	175	–	165	–	130	30	1,2
130	350	–	165	–	130	30	2,3
130	690	–	185	–	150	30	4,6
130	1380	190	260	187	190	50	9,2
220	130	–	165	–	130	30	0,5
220	260	–	165	–	130	30	1,0
220	520	–	185	–	150	30	2,0
220	1040	190	260	187	190	50	4,0
220	2080	215	272	215	200	50	8,0

Inbyggnadstransformatorer

110 V nätspänning motsvarar 0–130 V sekundärspänning
130 V nätspänning motsvarar 0–150 V sekundärspänning
220 V nätspänning motsvarar 0–260 V sekundärspänning

SVENSKA AB PHILIPS MÄTINSTRUMENTAVDELNINGEN · STOCKHOLM 6

BILDBANDSPROJEKTORER OCH BILDBAND

Bildbandsprojektorn Neo-Diafant
Levereras med lampor för 250 eller 375 W

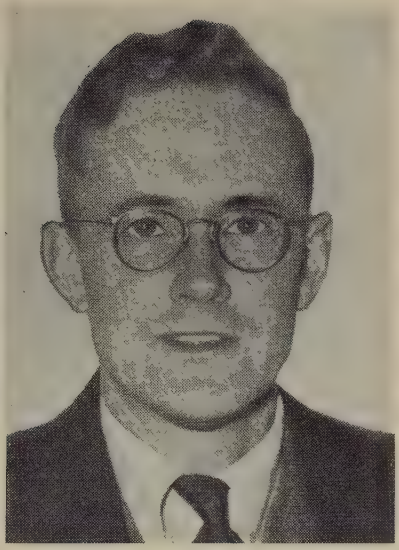
Bildband — MATEMATIK

Vinkeln, triangeln, fyrhörningen, 27 bilder	10:—
Cirkeln, 28 bilder	11:—
Likformighet, Pythagoras sats, 31 bilder	12:—
Funktionslära, 34 bilder	13:—
Stereometri, 40 bilder	15:—
Planimetri, under utarbetande	

Texthäfte medföljer till samtliga bildserier.

P. A. NORSTEDT & SÖNER
Skolavdelningen — Box 898 — Stockholm 1

Felix Bloch



Edward M. Purcell

Nobelpriset i fysik 1952

Av docent Gunnar Lindström, Nobelinstitutet för Fysik, Stockholm

Nobelpriset i fysik 1952 tilldelades Felix Bloch och Edward M. Purcell för deras insatser inom den magnetiska kärnspektroskopien. Det är lättare att förstå dessa båda forskares insatser, om man ser dem i deras historiska sammanhang.

Redan tidigt fann man vid optiska spektra en s. k. finstruktur hos spektrallinjerna. Denna struktur beror på att elektronens spin ($\pm\frac{1}{2}$) kan kopplas på olika sätt till det magnetiska fält som genereras vid elektronernas rörelser kring atomkärnan.

Genom en växelverkan mellan atomhöljets och atomkärnans magnetiska moment får man på liknande sätt en ytterligare uppspaltning av spektrallinjerna. Denna uppspaltning blir synnerligen liten, eftersom kärnans magnetiska moment är omkring tusen gånger mindre än höljets. Denna energiuppspaltning är känd under namnet hyperfinstruktur.

De experimentella svårigheterna vid hyperfinstrukturundersökningar äro stora på grund av uppspaltningens ringa storlek. Trots detta har

bland andra H. Schüler undersökt och bestämt spinkvanttalet för ett stort antal atomkärnor.

Man har också försökt att ur den experimentellt uppmätta hyperfinstrukturuppspaltningen beräkna det magnetiska kärnmomentet. Detta är emellertid betydligt svårare än att bestämma spinkvanttalet, och den erhållna noggrannheten är endast av storleksordningen 10 %.

Betydligt bättre resultat fick man med den s. k. molekylarstrålemetoden, som utvecklats av Stern och Rabi. Det verkligt stora framsteget gjordes 1938, då Rabi, Zacharias, Millman och Kusch redogjorde för de första resultaten med den magnetiska resonansmetoden.

Kvantmekaniken ger följande uttryck för det totala magnetiska kärnmomentet:

$$\mu^* = g \cdot \beta_{\text{kärn}} \sqrt{I(I+1)}$$

där g är den s. k. Landé-faktorn, som är av storleksordningen 1; $\beta_{\text{kärn}}$ är enheten för kärnmoment och kallas en kärnmagneton; I är kärnspinnet.

Man kan lätt visa, att kärnmomentet kan uppdelas i två komponenter, den ena längs det magnetfält som kärnan befinner sig i och den andra vinkelrätt mot detta:

$$\mu_H = g \cdot m\beta_{\text{kärn}} \text{ och } \mu_\perp = g \cdot \beta_{\text{kärn}} \sqrt{I(I+1) - m^2}$$

där I, $(I-1) \ldots \geqq m \geqq -1 \ldots (-I+1)$, $-I$.

Om kärnan befinner sig i ett magnetfält H, blir den potentiella energien:

$$u_m = -\mu_H \cdot H = -g\beta_{\text{kärn}} \cdot \mathrm{H} \cdot m$$

Detta ger de $2I+1$ olika Zeeman-nivåerna. Energiskillnaden mellan två närbelägna nivåer blir

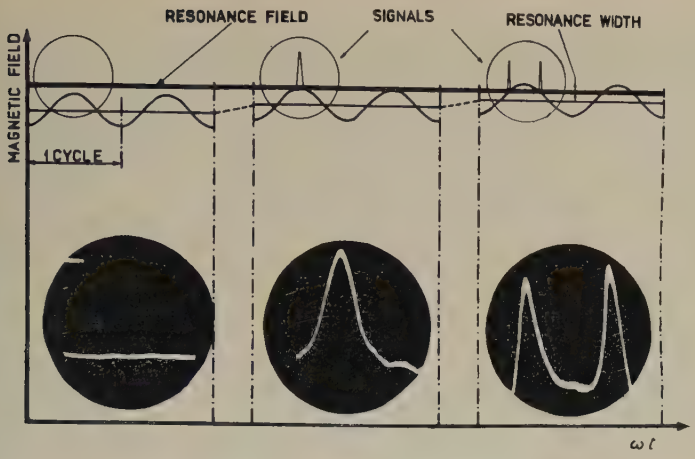
$$\Delta u = h\nu = -g\beta_{\text{kärn}} \cdot H$$

$$\text{Av } \beta_{\text{kärn}} = \frac{eh}{4\pi Mc} \text{ erhålles } \omega = 2\pi\nu = -g \cdot \frac{e}{2Mc} \cdot H.$$

Här är e elektronladdningen, M kärnans massa och c ljushastigheten; ω är den s. k. Larmor-frekvensen.

Atomkärnan kommer att precessera med frekvensen ν i magnetfältet. Vid 7000 gauss blir $\nu = 30$ Mp/s för protoner. Larmor-frekvensen ligger alltså inom radiofrekvensområdet.

Den magnetiska resonansprincipen går ut på att man applicerar ett roterande högfrekvensfält vinkelrätt mot huvudfältet H. Om det roterande fältet har en frekvens som skiljer sig från kärnans Larmorfrekvens, påverkas denna inte, ty om fältet i ena ögonblicket strävar att öka utslagsvinkeln, så kommer det i nästa ögonblick att minska



Protonresonanssignaler i ett sinusmodulerat magnetfält.

densamma. Den summerade effekten blir därför noll. Har högfrekvensfältet däremot samma frekvens som kärnans precession, kommer däremot utslagsvinkeln att ändras, dvs. vi få en energiövergång från det ena tillståndet till det andra.

Rabi och hans medarbetare utnyttjade detta i förening med molekylarstrålemetoden och kunde då genom en uppmätning av högfrekvensfältets frekvens beräkna magnetiska kärnmoment med en noggrannhet av storleksordningen promille.

Bloch och Purcell angav ungefär samtidigt (1946) i två korta meddelanden två varandra närbesläktade metoder med vilka man kan uppmäta det magnetiska kärnmomentet med synnerligen stor noggrannhet utan att använda sig av den besvärliga molekylarstrålemetoden.

I princip går Bloch's metod ut på att man placerar det prov som skall undersökas (t. ex. protoner i vatten) i en glastub som omgives av två mot varandra vinkelräta spolar. Dessa placeras sedan i ett magnetfält, så att båda bli vinkelräta mot huvudfältet *H*. Den ena spolen matas med högfrekvens från en generator under det att den andra kopplas till en känslig förstärkare. Spolarnas lägen finjusteras, så att ingen signal överföres till förstärkaren. Om nu fältet ändras så att Larmor-frekvensen överensstämmer med den inmatade frekvensen, få vi energiövergångar enligt ovan. Man kan visa att detta leder till en inducerad signal i den andra spolen. Genom att modulera huvudfältet kommer man att få upprepade signaler (jämför fig.). Figuren visar tre olika fall. I det första är fältet för lågt, varför vi inte får någon signal. I det andra är fältet sådant att vi endast få

en signal under varje period, och i det tredje fallet få vi två signaler på oscillografskärmen. Denna metod kallas induktionsmetoden eftersom det är den i kärnsystemet inducerade signalen som uppmätes.

Purcells metod går ut på att man placerar provet i en spole, som sedan placeras med sin axel vinkelrätt mot huvudfältet. Spolen anslutes sedan till en högfrekvensbrygga, som matas från en högfrekvensgenerator. Från bryggan ledes sedan den nästan helt utbalanserade signalen till en förstärkare. Vid en energiövergång enligt ovan överföres energi från spolen till kärnsystemet, vilket leder till en obalans i bryggan. Denna registreras sedan av förstärkaren och leder till att man på en oscillograf kan få signaler enligt fig. Metoden kallas absorptionsmetoden, eftersom det är den i spolen absorberade effekten som registreras.

De av Bloch och Purcell introducerade metoderna ha redan gett många vackra resultat. Man kan t. ex. med dessa uppmäta förhållandet mellan deutronens och protonens magnetiska moment med en noggrannhet av en enhet på tio millioner, vilket svarar emot att uppmäta avståndet mellan Stockholm och Göteborg på några cm när.

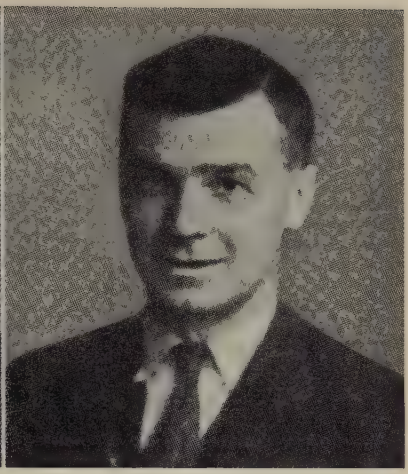
Det är dessa synnerligen noggranna metoder som belönats med 1952 års Nobelpris i fysik. De ha öppnat helt nya möjligheter inom kärnforskningen och kunna tillämpas i många andra sammanhang. Man kan t. ex. på detta sätt uppmäta magnetfält med hjälp av protonens Larmor-frekvens med nästan hur stor noggrannhet som helst.

Felix Bloch är schweizare, född i Zürich 1905. Efter studier vid Tekniska högskolan i sin hemstad och vid olika europeiska universitet — bl. a. i Leipzig, där han blev Phil. Dr. 1928 — kom han 1933 till Förenta staterna och blev 1936 professor i teoretisk fysik vid Stanford i Kalifornien. Tidigare huvudsakligen verksam som teoretisk fysiker har han nu fått sitt pris för en experimentell insats.

Edward M. Purcell är född 1912 i Taylorville, Illinois. Han blev 1938 Dr. Phil. vid Harvard och professor där 1949. Hans specialitet faller inom radar- och mikrovågsområdet, där han under kriget gjorde bemärkta insatser. Hans nu belönade metod har öppnat vida fält för forskningen, och han har trots sin ungdom redan kring sig samlat en krets framstående forskare.

Litteratur: En bredare framställning finnes i t. ex. K. Siegbahn, Atomkärnors spin etc., Kosmos, bd 26, 1948 och »Kärnfysik», Kompend. utg. av Forskningsinst. f. fysik, Stockholm 1948, kap. 10. (Red.)

Archer J. P. Martin



R. L. Millington Synge

Om fördelningskromatografi

Nobelpriset i kemi 1952

Av assistent Wilhelm Forsling, Nobelinstitutet för Fysik, Stockholm

1952 års nobelpris i kemi tilldelades av Kungl. Vetenskapsakademien de båda brittiska forskarna Archer J. P. Martin och R. L. Millington Synge [1] för deras uppfinning av fördelningskromatografin.

Det första decenniet i fördelningskromatografins tillvaro har förflutit. Det synnerligen framgångsrika utnyttjandet av denna kemiska separationsmetod har redan givit starkt stöd för påståendet, att man i den erhållit ett av den analytiska kemins viktigaste redskap. Främst har forskningen inom biokemin och den organiska kemin kunnat draga ovärderlig nytta av den nu belönade uppfinningen.

Kromatografins tillkomst och tidigare utveckling

För att vi lättare skall kunna placera in Martins och Synges insats i dess historiska sammanhang, skall vi först göra en kort återblick på kromatografins tidigare utveckling.

Redan på 1800-talet arbetade en del forskare med kemiska separationsmetoder, som i princip anslöt sig till vad man senare kallade

[1] Uttal: sing.

kromatografisk adsorptionsanalys. Som dennas »grand old man» betraktar man emellertid vanligtvis den polsk-ryske botanisten Mikael Tswett, som vid detta sekels början gjorde en utmärkt insats i studiet av växtfärgämnena.

Tswetts mest bekanta arbete gällde separationen av växtfärgämnena i gröna blad. Han extraherade dessa ämnen ur torkade blad med petroleumeter. Extraktet fick rinna igenom ett lodrätt rör, som till en del fyllts med finfördelad krita (fig. 1). Kritan hindrades genom ett litet bomullsfilter att föras ned i den sugflaska, som användes för att genom undertryck påskynda genomrinnandet av petroleumetern. Efter det att extraktet sugits in i kolonnen, tillsatte Tswett rikligt med rent lösningsmedel, som även det fick rinna igenom kritan. Det visade sig nu, att de två gröna klorofyllerna från extraktet adsorberats på kritan i toppen av kolonnen, under det att däremot de gula karotinerna snabbt passerade nedåt i röret med lösningsmedlet. Några andra gula bladpigment, xantofyllerna, adsorberades något svagare av kritan än klorofyllerna. De bildade därför gula band strax under de gröna klorofyllzonerna. Tswett hade fått en vacker färgkarta över

Fig. 1. Tswetts adsorptionskolonn.

bladens pigment, vilka med andra då kända metoder knappast kunde ha åtskilts. I detta och liknande försök att separera växtfärgämnen gjorde adsorptionskromatografin verkligen skäl för sitt namn (av grek. chrōma, färg, och gráfein, skriva).

Färglösa ämnen kunde naturligtvis separeras på samma sätt, även om problemet att lokalisera de enskilda komponenterna här blev betydligt besvärligare. Att namnet kromatografi också i sådana fall ofta användes beror på den principiella likheten och metodens historiska bakgrund.

Tswett isolerade de olika pigmenten genom att trycka ut den fuktiga adsorptionskolonnen ur glasröret, dela upp den i lämpliga stycken med var sin pigmentzon samt extrahera bitarna var för sig med alkohol. Numera använder man oftare s. k. flytande kromatogram, dvs. man låter lösningsmedlet rinna genom kolonnen, tills de olika komponenterna var för sig kan uppsamlas i lämpliga fraktioner av det genomrunna lösningsmedlet, det s. k. eluatet.

Trots Tswetts enkla och vackra separationer dröjde det ända till 1930-talet, innan adsorptionskromatografin fick sitt verkligt stora genombrott. Orsaken härtill var bl. a. bristen på lämpliga mikrokemiska metoder för studiet av de tillgängliga, oftast ytterst små

kvantiteterna av de separerade ämnena. En viss misstro mot metoden fanns även bland en del ledande kemister, som ansåg att adsorptionsprocessen kunde verka nedbrytande på många ömtåliga organiska föreningar.

1938 års nobelpristagare i kemi, Richard Kuhn, som 1931 med adsorptionskromatografins hjälp först lyckades uppdela karotinerna, nedlade stora förtjänster på framställningen av bättre adsorptionsmedel, bl. a. aluminiumoxid. Förbättrade produktionsmetoder gjorde snabbt dessa adsorbenser tillgängliga i större kvantiteter. Detta ledde till nya möjligheter att renframställa många ytterst sparsamt förekommande ämnen i större skala. Man erhöll på så sätt tillräckliga kvantiteter av dessa ämnen för noggranna kemiska strukturbestämningar.

Även för separation av oorganiska joner kunde metoden användas, ehuru betydelsen härav var mindre ur forskningssynpunkt, då de klassiska oorganiska analysmetoderna i allmänhet kunde ge minst lika goda resultat.

1948 års nobelpristagare i kemi, Arne Tiselius i Uppsala, bidrog också mycket framgångsrikt till adsorptionsanalysens vidare utveckling bl. a. genom sinnrika apparatkonstruktioner, för vilket tidigare redogjorts i Elementa (32, 1949, s. 4).

Användningen av filtrerpapper som adsorbens för kromatografisk analys är t. o. m. av äldre datum än den Tswettska kolonnen. Ursprungligen på initiativ av sin lärare C. F. Schönbein utförde tysken Friedrich Goppelsroeder under senare delen av 1800-talet en mängd analyser genom att låta nedre delen av filtrerpappersremsor doppa ned i lösningar, varvid olika lösta ämnen sögs upp till olika höjder i papperet över vätskeytan. Goppelsroeder kallade metoden kapillaranalys, emedan kapillärkrafter svarade för uppsugningen av lösningen. Han påvisade t. ex. spår av järn i destillerat vatten genom fuktning av papperet med sur kaliumferrocyanidlösning vid det uppåtstigande vattnets front.

Uppfinningen av fördelningskromatografin

1952 års nobelpristagare, Martin och Synge, studerade båda under 1930-talet i Cambridge. Då de sysslade med närbesläktade problem, separation av vitaminer resp. aminosyror, hade de också gemensamt intresse av förbättrade separationsmetoder. Adsorptionskromatografins svagheter låg i svårigheten att variera försöksbetingelserna, i de ofta betydande preparatförlusterna och i det förhållandet, att metoden lämpade sig mindre väl för vattenlösliga substanser, som t. ex. äggviteämnen och deras spjälkningsprodukter, peptider och aminosyror.

Man hade tidigare med stor möda använt upprepade extraktions-

förfaranden, då det gällde att skilja olika aminosyror åt. Deras individuella fördelningskoefficienter för två sinsemellan oblandbara lösningsmedel skiljer sig emellertid i allmänhet inte tillräckligt mycket från varandra, för att man med ett av tekniska skäl rätt begränsat antal upprepade extraktioner skall tillfredsställande kunna uppdela små kvantiteter av de omkring ett tjugotal olika aminosyror, som ingår i vanliga äggviteämnen.

Martin och Synge hade klart för sig, att problemets lösning borde ligga i uppfinningen av ett extraktionsförfarande, som var släkt med motströmsprincipen och som automatiskt skötte om, att extraktionsstegen upprepades ett mycket stort antal gånger. Då de vid början av 40-talet tillsammans hade anställning vid den engelska ylleindustrins stora forskningsinstitut i Leeds, stod tillräckliga tekniska resurser till förfogande för grundligt experimentellt studium av deras separationsproblem.

År 1941 fann de en utmärkt metod, som fick namnet »partition chromatography». Till det yttre var denna fördelningskromatografi mycket lik adsorptionskromatografin. De hade emellertid infört en ny princip, som var mer rationell än den selektiva adsorptionen, och som tillät betydligt större variationsmöjligheter i försöksbetingelserna än den äldre adsorptionskromatografin.

Kolonnen bestod av kiselgel, mättad med vatten. Den blandning av acetylerade aminosyror, som man ville uppdela i sina komponenter, tillfördes i form av en kloroformlösning försatt med 1 volymsprocent butanol. Därefter tvättades med enbart lösningsmedlet, förut mättat med vatten för att förhindra en partiell uttvättning av vattenfasen i kiselgelen. Då fördelningskoefficienterna för de individuella acetylerade aminosyrorna är något olika för det aktuella tvåfassystemet, kom de mera vattenlösliga komponenterna att till stor del anrikas i den stillastående vattenfasen, under det att de, som hade större benägenhet att lösa sig i den organiska fasen, följde med denna snabbare mot kolonnens nedre ända. Osubstituerade aminosyror kunde inte skiljas på detta sätt, emedan adsorptionen på kiselgelen i det fallet hade ett dominerande inflytande.

Till den uppsats i The Biochemical Journal, där detta första fördelningskromatografiska försök beskrevs, hade de båda forskarna även utarbetat en approximativ kromatografisk teori, som rätt väl motsvarade de experimentella data, vilka snart i allt snabbare takt publicerades i särskilt de biokemiska vetenskapliga tidskrifterna.

Papperskromatografin

Som bärare av den orörliga vätskefasen, oftast vatten, använde man förutom kiselgel även t. ex. stärkelse och cellulosa. En särskilt be-

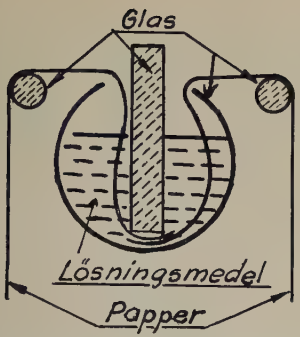


Fig. 2. Tvärsnitt genom vätskebehållaren vid papperskromatografi enligt Consden, Gordon och Martin.

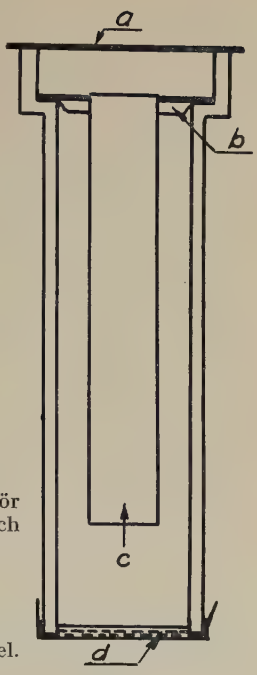


Fig. 3. Kammare med upphängningsanordning för behållare och papper enligt Consden, Gordon och Martin.

a. Glasskiva.
b. Behållare för organiskt lösningsmedel.
c. Filtrerpapper.
d. Bottenskål av bly med vatten och lösningsmedel.

tydelsefull händelse i fördelningskromatografins utveckling var emellertid införandet av papperskromatografin år 1943. Det var Martin och Synge, som tillsammans med A. H. Gordon prövade användningen av remsor av filtrerpapper som ersättning för den tidigare enbart använda kolonnen. Man kunde nu lättare separera och kvalitativt identifiera komponenterna ur blandningar av substansmängder ner till storleksordningen mikrogram.

En utförlig beskrivning av denna separationsmetod publicerades 1944 av Gordon, Martin och R. Consden. Deras enkla men ändamålsenliga apparatur, som återges av fig. 2 och 3, fick snabbt många avbilder och varianter i kemilaboratorier över hela världen. Arbetssättet har blivit ungefär det följande. En filtrerpappersremsa tillklippes med en bredd av 2—10 cm och en längd av 20—60 cm. 5—10 cm från ena änden viker man ett veck eller ritar ett blyertsstreck, en startlinje, tvärs över remsan. Med den lösning, som man vill undersöka på t. ex. aminosyror, fuktar man papperet längs startlinjen så att den smala fuktfläcken innehåller cirka 0,1—1,0 mg av lösta ämnen. Pappersänden fästes sedan så att den doppar ned i en liten avlång porslinsskål eller en behållare, gjord av t. ex. ett glasrör (fig. 2). Papperet och

behållaren överföres därefter till en kammare, t. ex. en glascylinder med ca 20 cm diameter, i vars botten finns en blandning av vatten och det organiska lösningsmedel, som skall användas för separation av komponenterna. Som framgår av fig. 3 fästes behållaren vid en upphängningsanordning i övre delen av kammaren, så att filtrerpappersremsan får hänga fritt ned utan att doppa i vätskeblandningen på bottnen. Kammaren tillslutes tätt med ett lämpligt lock, t. ex. en slipad glasskiva. Papperet får nu i allmänhet hänga vid konstant temperatur i den fuktmättade atmosfären, tills vattnet i papperet står i jämvikt med vattenångan i kammaren. Därefter tillsätter man, helst genom ett litet hål i locket, det vattenmättade lösningsmedlet till behållaren, i vilken filtrerpapperet doppar ner. Hålet i locket hålles före och efter ihällningen tätt slutet med en propp. Lösningsmedlet börjar nu sin vandring genom den fuktmättade filtrerpappersremsan. Då kammaren även är mättad med lösningsmedlets ånga, har avdunstningen från papperet föga betydelse.

Sedan fronten av lösningsmedlet efter, låt oss säga, ett dygn nått ett kort stycke från den nedre änden, avbrytes i allmänhet försöket, papperet tas ut och frontlinjen markeras med ett blyertsstreck. Papperet torkas sedan i ett torkskåp eller med en vanlig hårtork. Därefter sprutar man remsan medelst en vätskespridare (sprayer), innehållande ett lämpligt färgreagens för de nu över papperet fördelade blandningskomponenterna från försökslösningen. Oftast efter förnyad torkning framträder fläckar på papperet där de individuella komponenterna befinner sig. Konturerna förstärks lämpligen genom iritning med en penna i de fall man har att förvänta, att fläckarnas färger åldras och bleknar.

På pappersremsan mäter man upp avstånden från startlinjen till en komponents läge resp. till lösningsmedlets frontlinje vid försökets slut. Förhållandet mellan dessa avstånd betecknar man som ifrågavarande komponents R_F-värde. R_F-värdena för en serie av t. ex. aminosyror är väl reproducerbara om försöksbetingelserna bibehålles oförändrade. Dessa värden kan därför direkt utnyttjas för identifiering av okända komponenter ur en enkel blandning. Vid analys av komplicerade blandningar använder man sig oftast av samtidigt utförda jämförelseprov med kända komponenter.

I de flesta fall är en fullständig uppdelning av blandningen inte möjlig att utföra med användande av ett rent organiskt lösningsmedel. Efter tillsats av andra ämnen, t. ex. någon syra, till lösningsmedlet, kan man emellertid ibland utnyttja en förändring av R_F-värdena för ett antal komponenter. Om man exempelvis har basiska aminosyror i sur lösning, kan man förvänta sig, att de bildade, utpräglat joniserade formerna har större benägenhet att stanna i vattenfasen än de

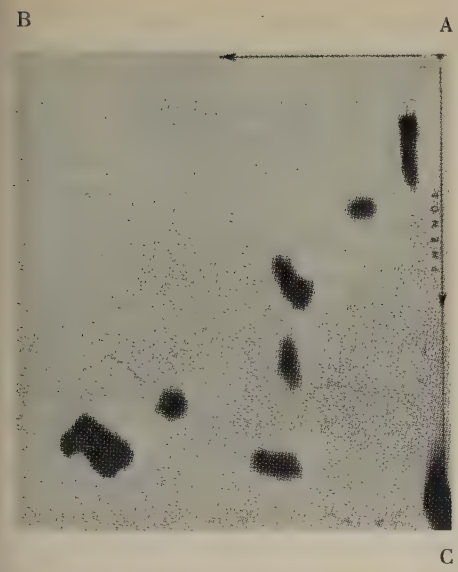


Fig. 4. Tvådimensionellt kromatogram, visande uppdelningen av några äggviteämnen ur en blandning med lösningsmedlen butanol i riktningen A→B och fenol i riktningen A→C.

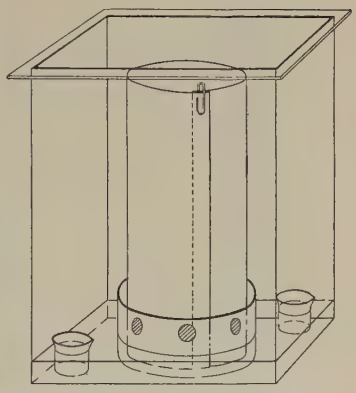


Fig. 5. Enkel glasapparatur för erhållande av uppåtgående kromatogram. Filtrerpappersarket är hoprullat till cylinderform och placerat i en kristallisationsskål.

har att följa den organiska fasen nedför papperet. Detta innebär att dessa komponenters R_F-värden minskats genom syratillsatsen.

Betydligt utökade separationsmöjligheter erbjuder den tvådimensionella papperskromatografin, som först även angavs av Consden, Gordon och Martin. På samma sätt, som ovan beskrivits för analys på pappersremsor, utför man därvid först en fördelningskromatografisk separation längs ena kanten av ett kvadratiskt ark av filtrerpapper. Sedan det torkats, vrider man papperet 90° och utför en ny separation med ett annat organiskt lösningsmedel vinkelrätt mot den första genomrinningsriktningen. Genom en lämplig kombination av använda lösningsmedel, kan man i de flesta fall ernå en fullständig separation av den blandning man önskar analysera.

Fig. 4 återger utseendet av ett tvådimensionellt kromatogram. I detta fall är det en blandning av aminosyror, som uppdelats. Blandningens utgångsläge markeras av en punkt uppe i hörnet vid A. Man har sedan använt först butylalkohol med tillsats av ättiksyra för kromatografisk separation i riktningen A→B. Därefter har man separerat i riktningen A→C med fenol. Efter torkning sprutar man papperet med

ett lämpligt reagens, t. ex. en 0,1 %-ig lösning av ninhydrin i kloroform, som efter ytterligare torkning i värme ger färgade fläckar på de ställen, där komponenterna befinner sig.

Det bör påpekas, att valet av lämpligt filtrerpapper är av stor betydelse för ett gott resultat. De flesta i litteraturen beskrivna papperskromatografiska försöken har utförts med Whatmanpapper, t. ex. nr 1 eller nr 4. Även svenskt Munktellpapper, exempelvis OB, har använts. I många fall, särskilt vid oorganisk papperskromatografi, spelar adsorptionen på papperet en så betydande roll, att man bör tala om mellanformer av fördelningskromatografi och adsorptionskromatografi. Komplexbildning har också stort inflytande på den kromatografiska processen vid separation av oorganiska joner. Då man inte tillräckligt känner effekternas inbördes storleksförhållanden har en förhandsberäkning av R_F-värdena inte kunnat utföras i sådana fall. Vid ren fördelningskromatografi är däremot, som ovan antytts, en dylik förhandsberäkning av R_F-värden ur kända fördelningskoefficienter åtminstone approximativt möjlig.

Det är inte nödvändigt, att det organiska lösningsmedlet och vattnet har begränsad blandbarhet. På papperet bildas ändå två faser genom att cellulosan huvudsakligen kvarhåller vattenmolekylerna under bildning av hydrater i den amorfa delen, under det att den ohydratiserade kristallina delen av cellulosan tjänar som sammanhållande stomme i papperet.

I beskrivningen av arbetssättet vid papperskromatografiska separationer ovan skildrades hur ett nedåtgående kromatogram erhölls. Apparatur härför finns nu även kommersiellt tillgänglig. Man kan emellertid även använda ett utförande, som närmare ansluter sig till Goppelsroeders. Man får då ett uppåtgående kromatogram. En enkel anordning härför visar fig. 5.

Fördelningskromatografins användningsområden

Martin och Synge gjorde sin uppfinning av fördelningskromatografin i anslutning till forskningsuppgiften att analysera ullfibrernas kemiska sammansättning. De insåg emellertid omedelbart metodens stora generella användbarhet och gav i sin första uppsats år 1941 en rad förslag till möjliga användningsområden, vilka nu mestadels prövats och befunnits utomordentligt gagnade av fördelningskromatografins införande. Själva har de på flera områden framgångsrikt använt och utvecklat metoden. Många andra forskare har stimulerats av framgångarna och bidragit med betydelsefulla undersökningar rörande separationer och renframställning av exempelvis kolhydrater, nukleinsyror, purin- och pyrimidinbaser, alkaloider, penicillin och streptomycin.

En rad organiskt kemiska strukturbestämningar har under de senaste åren kunnat utföras till stor del tack vare fördelningskromatografins möjligheter att snabbt och säkert ge svar på analysproblem rörande de undersökta ämnenas sönderfallsprodukter. Synge har sålunda med framgång studerat strukturen av det antibiotiskt verksamma ämnet gramicidin.

Kemiska processer såsom växternas kolsyreassimilation har också undersökts med användning av papperskromatografi. För identifiering har man därvid ofta använt inbyggda radioaktiva nukleider och registrerat de studerade ämnenas lägen på papperet genom svärtningen av en mot papperet lagd fotografisk plåt.

Som av ovanstående framgått, har även oorganiska joner separerats med fördelningskromatografiska metoder. Olika forskargrupper har därvid utarbetat förfaranden för såväl kvalitativa som kvantitativa analyser av substansmängder ända ner till mikrogramkvantiteter. Även om man för en rad olika blandningar av katjoner med i allmänhet gemensam anjon redan uppnått mycket goda separationsresultat, vilket fig. 6 utgör ett exempel på, återstår säkert åtskilligt experimentellt arbete, innan man erhållit en allmänt användbar systematisk analysgång. Det gäller framför allt att finna lämpliga lösningsmedel och komplexbildare för katjonernas uppdelning i analysgrupper och därefter för separation av de olika komponenterna i varje grupp för sig på papperet.

Fig. 6. Kromatogram visande separation av nickel, mangan, kobolt och zink i form av klorider med en acetonlösning innehållande 5 volyms-% vatten och 8 volyms-% saltsyra. R_F-värden: Ni 0,1, Mn 0,3, Co 0,6 och Zn 0,8. (Bursdall, Davies, Linstead och Wells, J. Chem. Soc. 1950, 516.)

Genom kombination av vertikalt arbetande fördelningskromatografi och horisontellt verkande elektrofores har man på hängande filtrerpapper erhållit kontinuerligt arbetande kromatogram, där de olika komponenterna från en blandning runnit av papperets nedre, taggformigt klippta kant vid olika punkter. Även andra utvecklingsmöjligheter ha prövats, t. ex. användandet av gasfas i stället för rörlig vätskefas vid skiljandet av flyktiga ämnen, utbyte av den stationära vattenfasen och den rörliga organiska fasen genom användning av kolonner av exempelvis cellulosaacetat eller av ett slags gummiimpregnerat papper, vilka båda kvarhåller det organiska lösningsmedlet

under det vattenfasen passerar nedåt. Särskilt Martin har varit mycket verksam med apparatur- och metodförbättringar, under det att Synge mera ägnat sig åt studiet av kromatografins praktiska tillämpningar.

Man får emellertid inte glömma bort, att under det senaste decenniet även andra separationsmetoder utvecklats, som på vissa områden synes vara klart överlägsna fördelningskromatografin. Särskilt bör nämnas jonbytartekniken, som man kan betrakta som kromatografins tredje huvudgren. Fördelar och nackdelar med de olika metoderna måste för varje aktuellt fall väl vägas, innan man bestämmer sig för hur en viss kemisk separation lämpligen bör utföras, då tidigare erfarenheter saknas.

Till sist måste framhållas, att uppfinningen av fördelningskromatografin varit av utomordentlig betydelse inte minst därför, att metoden kunnat utformas så enkelt, att den blivit tillämpbar i vilket laboratorium som helst. Detta är särskilt glädjande i en tid då utvecklingen annars tenderar mot allt dyrbarare och mera komplicerade forskningsredskap, och då det åtminstone i små länder finns mycket gott om vetenskapliga institutioner med mycket små ekonomiska resurser.

Archer John Porter Martin är född år 1910. Han blev Doctor of Philosophy efter studier i Cambridge. Därefter anställd som biokemist vid The Wool Industry Research Association i Leeds. Han är numera chef för den fysiologiska avdelningen vid National Institute of Medical Research, London. Martin blev år 1950 ledamot av Royal Society i London och tilldelades 1951 Svenska läkaresällskapets Berzeliusmedalj i guld.

Richard Laurence Millington Synge är född år 1914. Efter studier i Cambridge, International Wool Secretariat Research Student 1938. Anställdes som biokemist vid The Wool Industry Research Association i Leeds 1941 samt några år senare vid Lister Institute of Preventive Medicine i London. Han är sedan 1948 knuten till Rowett Research Institute, Bucksburn, Skottland. Synge är även ledamot av Royal Society.

Litteratur

Utmärkta översiktsartiklar om kromatografi finnes i
Endeavour, *6*, 21, 1947; *10*, 213, 1951 och *11*, 5, 1952.

Ovan ref. uppsatser angående uppfinningen av fördelningskromatografin:
Martin, A. J. P. och Synge, R. L. M., Biochem. J. *35*, 1358, 1941.
Consden, R., Gordon, A. H. och Martin, A. J. P., Biochem. J. *38*, 224, 1944.

Några monografier:
Chromatographic Analysis, Faraday Soc. Disc., No. 7, London 1949.
Partition Chromatography, Biochem. Soc. Symp, No. 3, Cambridge 1950.
Balston, J. N. och Talbot, B. C., *A guide to filterpaper and cellulose powder chromatography*, London 1952.

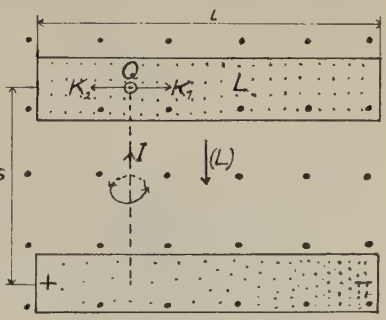
Enkel härledning av induktionslagen

Av lektor V. Hugo Sanner, Uppsala

I de flesta läroverk visas giltigheten av induktionslagen

$$E = \text{konst} \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

experimentellt på ett mer eller mindre kvantitativt sätt. Och alldeles självklart bör man göra något sådant försök. Men det har alltid bjudit mig emot att konstantvärdet, med vanliga elektriska enheter 10^{-8}, har måst dekreteras utan något bevis. De sista åren har jag därför teoretiskt härlett induktionslagen för ett enkelt specialfall (dock utan att fordra att eleverna lär sig beviset). Man får då också tillfälle att använda några formler, som annars sällan utnyttjas. Härledningen är närmast ansluten till framställningen i Bergholms lärobok med i denna bok använda beteckningar.



Förutsätt att en rak ledare L med längden l cm föres (nedåt i figuren) med konstant hastighet vinkelrätt mot kraftlinjerna i ett homogent magnetfält med styrkan B gauss. I figuren tänkas fältlinjerna gå vinkelrätt mot papperets plan emot läsaren. På tiden t sek hinner ledaren s cm. En av ledningselektronerna i ledaren med laddningen Q coulomb rör sig med ledaren en sträcka (av längden s, i figuren streckad) som alltså kan likställas med en elektrisk ström, vars styrka enl. def. är $I = Q/t$ ampere. Denna ström påverkas då i magnetfältet av en kraft K_1 dyn, vars riktning fastställes på vanligt sätt. En elektronförskjutning uppstår i ledaren. Härigenom uppkommer en spänning mellan L:s ändpunkter, som är den inducerade elektromotoriska kraften E volt. Det elektrostatiska fältet i ledaren, $F = E/l$ volt per cm, påverkar laddningen Q med kraften K_2 dyn. När $K_1 = K_2$, upphör elektronförskjutningen, och likheten måste bestämma storleken av den erhållna elektromotoriska kraften.

Man har alltså

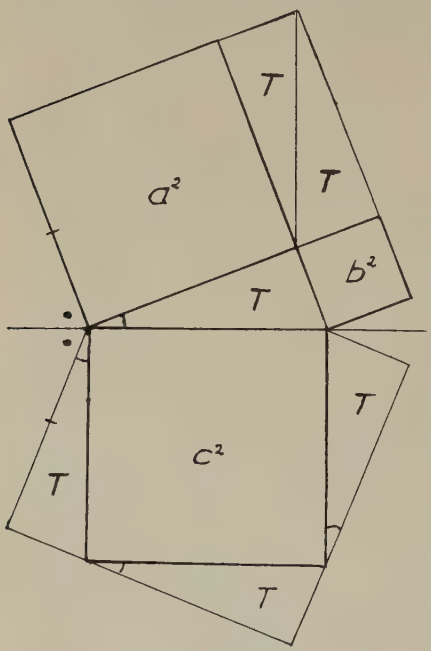
$$K_1 = 0{,}1\, B\, I\, s = 0{,}1\, B \frac{Q}{t} s \quad \text{och} \quad K_2 = 10^7 \cdot Q\, F = 10^7 \cdot Q \frac{E}{l}.$$

Sättes $K_1=K_2$, erhålles $E=10^{-8}\frac{B\,s\,l}{t}=10^{-8}\cdot\frac{\Phi}{t}$.

Den inducerade elektromotoriska kraften uttryckt i volt är sålunda lika med 10^{-8} gånger antalet per sek överskurna kraftlinjer. Är fältet inhomogent eller (och) ledarens rörelse olikformig, får man för en förflyttning av ledaren under en mycket liten tid Δt ett överskuret flöde $\Delta\Phi$, och ekvationen kan skrivas $E=10^{-8}\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Pythagoras' sats bevisad genom spegling

I anslutning till ett åskådligt bevis för denna sats (Elementa, årg. 35, s. 192) av G. Danielsson kan vidstående figur av A. G. Sillitto (Mathematical Gazette, v. 35, p. 243) vara av intresse. Sedan av den vanliga konfigurationen (T, a^2, b^2, c^2) med utåtvända kvadrater den på triangelsidan om hypotenusan liggande delen kompletterats till $O=a^2+b^2+3T$, speglas konturen av O i hypotenusan. Därvid uppkommer det ytlika området O', vars kontur innehåller hörnen i c^2. Automatiskt uppdelas då O' i c^2+3T. Ett gammalindiskt bevis (även känt från Kina) består av en figur, som ansågs tala för sig själv, åtföljd av ett lakoniskt: Se!, vilket synes försvara sin plats även vid Sillittos figur.



Se!

Den intresserade hänvisas till W. Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (Bd 3 i Math.-phys. Bibliothek). Fig. 24 där är nära besläktad med Sillittos, men O är kompletterad till en kvadrat $(a+b)^2$, och O' är vänd med bibehållande av hypotenusan som bas, så att O' tillsammans med T bildar en lika stor kvadrat. Där saknas därför den symmetri överskriften velat framhäva.

Josef Andersson

Olof Samuelsson:

ION EXCHANGERS IN ANALYTICAL CHEMISTRY

Den första utförliga framställningen i världen av den viktiga jonbytarmetoden. En oumbärlig bok för varje kemiskt laboratorium.

Inb. kronor
36:—

Vad är en
Elektron?

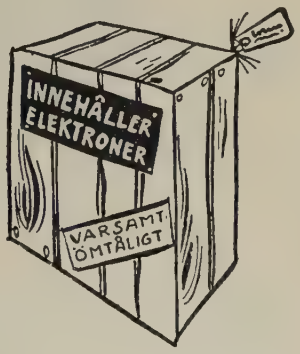
Svaret finner Ni i

ELEKTRONEN

människans tjänare

av JEANNE BENDICK

En mera populär framställning får man leta efter.



Kr 6:85
inb. 8:75

ALMQVIST & WIKSELL
Box 159, Stockholm 1, Postgiro 758

AWE

UNIVERSALINSTRUMENT
av fabrikat Metra

Ett universalinstrument av högsta kvalité för mätning av lik- och växelström samt lik- och växelspänning.

34 Mätområden:

Lik- och växelspänning: 1,2, 6, 12, 30, 60, 120, 300 och 600 V.
Lik- och växelström: 1,2, 3, 12, 30, 120, 300 mA, 1,2 och 6 A.
Noggrannhet: vid likström ± 1%, vid växelström ± 1,5%.
Egenförbrukning: ca 1 mA (inre motstånd 1000 ohm/V).

Instrumentet har spegelskala och knivvisare och är inbyggt i hölje av svart bakelit med dimensionerna 180 x 100 x 60 mm.

Begär offert från

Ingenjörsfirman INTRAM Aktiebolag

Stopvägen 22 – Bromma – Tel. Stockholm 26 35 30

Atwoods fallmaskin

Av lektor C. Bergholm, Stocksund

Den i fig. 1 avbildade apparaten består av ett hjul av lättmetall med 130 mm diameter och vikten 124 g. Hjulet uppbäres av ett litet kullager, vars axel är fastskruvad i ett mässingsrör, som är fäst vid en rektangulär mässingsskiva. Denna fastsättes medelst fyra skruvar vid en vägg, så att skivans överkant kommer ca 2 m över golvet.

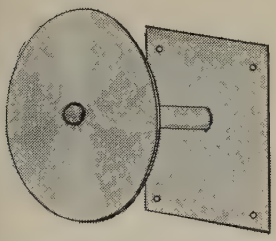


Fig. 1. Hjul av lättmetall; vikt 124 g. Skala 1 : 5.

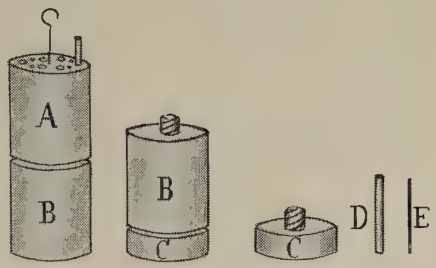


Fig. 2. Vikter; skala 1 : 3.
A (2 st.) och B (4 st.) à 124 g.
C (4 st.), massa=halva hjulets reducerade massa.
E övervikter à 3 g.
D friktionsvikter à 0,1 g.

Till apparaten hör en sats vikter (fig. 2). Två av dessa, betecknade med bokstaven A, äro försedda med en krok, i vilken snöret som går runt hjulet knytes fast. Vardera vikten väger 124 g. I övre ändan av varje vikt finnas flera 1 cm djupa hål, i vilka de cylinderformade »övervikterna» D och »friktionsvikterna» E kunna nedföras. Var och en av de sex övervikterna väger 3 g och vardera friktionsvikten 0,1 g. Vikterna B äro fyra till antalet och väga vardera 121 g. De kunna skruvas fast vid varandra och vid vikterna A. Utom nu nämnda vikter finnas fyra vikter C. Massan hos var och en av dessa är hälften av hjulets reducerade massa.

Någon utlösnings- och arreteringsanordning finns icke. På väggen vid sidan om hjulet och mitt för snöret anbringas en skala med 25 cm avstånd mellan delstrecken. Nollstrecket bör placeras omkring 20 cm

under hjulets axel för att underkanten av de hopskruvade vikterna skall kunna ställas i jämnhöjd med nollstrecket.

Friktionen är mycket ringa. Den ökar nästan proportionellt med belastningen. Hos den undersökta apparaten var en friktionsvikt av 0,1 g tillräcklig för att rörelsen skulle bli likformig, när belastningen i vardera ändan av snöret var 124 g.

Som snöre användes stark, lättböjlig engelsk björntråd (extra stark nr 6). Vikt $< 0{,}1$ g/m.

Med ifrågavarande apparat kan man icke bestämma hastigheten i ett visst ögonblick. För övrigt tjänar detta icke mycket till, enär ekvationen $v = at$, där v är hastigheten, a accelerationen och t tiden, ej kan experimentellt prövas. Den är en definitionsekvation. Accelerationen vid fritt fall kan icke beräknas med önskvärd noggrannhet av de värden, som erhållas med fallmaskinen. Däremot möter det ingen svårighet att visa, att rörelsen är likformigt accelererad, att accelerationen vid konstant massa är direkt proportionell mot den drivande kraften och att kraften vid konstant acceleration är proportionell mot massan.

Vid samtliga försök bestämmer man tiden med ett stoppur för en viss fallsträcka. Underkanten av den vikt, på vilken övervikten placerats, hålles i jämnhöjd med skalans nollstreck. Vikten får vila mot högra handens pekfinger, som berör stoppurets startknapp. Just som fingret pressar ned startknappen, blir vikten fri. Rörelsen börjar samtidigt som uret sättes i gång. Rörelsen hejdas med vänster hand, sedan vikten passerat det delstreck, som anger fallsträckan. Just som viktens underkant är mitt för delstrecket i fråga, stannar man uret. Med någon övning erhåller man utmärkta resultat.

1. Tabell I visar en observationsserie med 3 g övervikt men utan friktionsvikter. Belastningen å ömse sidor om hjulet är 372 g. Beteckningarna äro: s=fallsträckan, t=tiden och $2s/t^2$=accelerationen. Alla storheter äro uttryckta i cgs-enheter.

Tabell I

s	t	$2s/t^2$
50	5,61	3,18
100	8,03	3,10
150	9,76	3,15

Tabell II

K	t	a	a/K
6	5,36	6,96	1,16
12	3,80	13,9	1,15
18	3,05	21,5	1,19

2. För att visa att accelerationen är direkt proportionell mot kraften vid konstant massa, fördelas de 6 lika stora övervikterna på vanligt sätt på ömse sidor om hjulet. Kombinationen 4—2 ger övervikten 6 g,

5—1 ger 12 g och 6—0 ger 18 g. I tabell II är K=övervikten, t=tiden för 100 cm fallsträcka och a=accelerationen i cgs-enheter. Den tredje kolumnen visar inom försöksfelen, att accelerationen är proportionell mot kraften.

3. Vid demonstration av sambandet mellan kraft och massa måste man taga hänsyn till hjulets tröghetsmoment eller riktigare det till hjulets omkrets reducerade tröghetsmomentet, den reducerande massan, som för den undersökta apparaten bestämdes genom torsionssvängningar till 68 g. Om belastningen på ömse sidor om hjulet från början är 124 g, fördubblas det rörliga systemets massa, när man på varje sida ökar belastningen med (124+34) g.

Försöket utföres på följande sätt. Systemets massa och övervikten ökas i samma proportion, och man mäter tiden för t. ex. 100 cm fallsträcka. Tabell III visar en försöksserie. K=övervikten, m=belastningen på vardera sidan om hjulet, t=tiden för 100 cm fallsträcka. Av tabellen framgår att falltiden är konstant, dvs. accelerationen är konstant, när kraften och massan ökas i samma proportion.

Tabell III

K	m	t
3	124	4,82
6	248+34	4,78
9	372+68	4,88

Den här omnämnda fallapparaten saluföres av Rudolph Grave AB, Stockholm.

Not. Vid bestämning av hjulets tröghetsmoment i avseende på en axel genom medelpunkten vinkelrät mot hjulets plan, borttages kullagret. I centrum av den mutter, med vilken kullagret fastklämmes vid hjulet, borras ett litet hål. En tunn metalltråd införes i hålet och trådens ena ända fästes i muttern, som sedan skruvas fast vid hjulet. Trådens andra ända fastsättes i en klämmare. Hjulet försättes i svängningar i sitt eget plan (horisontalplanet) omkring den vertikala tråden som axel. Svängningstiden T_1 bestämmes. Därefter belastas hjulet med en metallring, så att ringens och hjulets medelpunkter sammanfalla. Svängningstiden T_2 bestämmes. Om hjulets tröghetsmoment är K_1 och ringens K_2, gäller: $(T_1/T_2)^2 = K_1 : (K_1+K_2)$. Ringens tröghetsmoment $K_2 = \frac{1}{2} m(r^2+r_0^2)$, där m är ringens massa och r och r_0 ringens yttre och inre radie. Då man känner K_2, kan K_1 beräknas. Hjulets reducerade massa är tröghetsmomentet K_1 dividerat med kvadraten på avståndet från hjulets medelpunkt till mittpunkten av det kring hjulet lagda snöret.

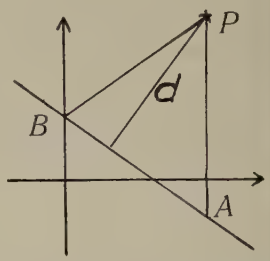
Avståndet från en punkt till en rät linje

Av läroverksadjunkt H. Skog †, Ystad

Avståndet från punkten $P(x_1, y_1)$ till räta linien $y=kx+b$ kallas d. P sammanbindes med punkten $B(0, b)$. Genom P drages en rät linie PA, parallell med y-axeln, som träffar den givna linien i A. Ordinatan för A blir kx_1+b. AP blir (oberoende av tecknen för k, b, x_1, y_1) $\pm(y_1-kx_1-b)$, där plustecknet gäller för alla punkter P, som ligga »ovanför» den givna linien. För dubbla ytan av triangeln APB erhålles då

$$d\sqrt{x_1^2+k^2x_1^2}=\pm(y_1-kx_1-b)(\pm x_1)$$

varur det vanliga uttrycket för d i detta fall lätt erhålles.



Man kan sedan övergå till formen $Ax+By+C=0$ för liniens ekvation. Att den då erhållna formeln gäller även för fallet $B=0$, visas genom enkelt geometriskt resonemang.

Då detta bevis icke förutsätter kännedom om normalformen för räta liniens ekvation samt synes vara enkelt, lättfattligt och uttömmande, kanske det kan vara lämpligt att införa i skolundervisningen.

Om man vill, kan man sedan mera som en kuriositet härleda normalformen för linien såsom orten för de punkter, vilkas avstånd till linien är $=0$, och visa konstanternas geometriska betydelse och ekvationens allmängiltighet.

Ohms andra lag

Av lektor Erik Walles, Falun

Vid härledningen av Ohms andra lag i gymnasiet brukar man ju, i enlighet med framställningen i gängse läroböcker, experimentellt visa, att Ohms första lag gäller även för elektrolyter, samt med potentialsond undersöka potentialfördelningen i ett galvaniskt element, använt som strömkälla. Genom en tänkt »potentialvandring» runt kretsen erhåller man sedan lagen.

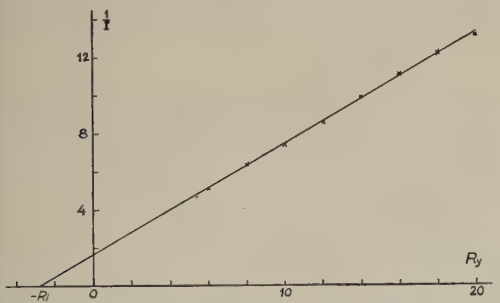
Något bättre sätt att komma fram till lagen är svårt att tänka sig; likväl är härledningen av den art, att en mera direkt experimentell prövning i efterhand är påkallad. Enligt t. ex. Bergholms Elektricitets-

lära utför man denna prövning genom att visa, att polspänningen V är en linjär funktion av strömstyrkan. Emellertid blir därvid skillnaden mellan största och minsta värdet av V endast några få tiondels volt, om R_i har ett måttligt värde, och de oundvikliga mätfelen lära väl mången gång göra rätlinigheten föga markerad. Här föreslås ett annat sätt, som torde ha vissa fördelar framför det nämnda.

Man utgår från lagen i formen $I=E:(R_i+R_y)$ och får genom invertering $\frac{1}{I}=\frac{1}{E}(R_i+R_y)$. Under förutsättning att E och R_i äro konstanta utsäger nu lagen, att strömstyrkans inverterade värde är en linjär funktion av R_y.

I en krets med inte allt för litet R_i (kromsyreelement, torrelement) göres nu med hjälp av en god amperemeter en serie mätningar av I vid olika R_y. Man bör av flera skäl, bl. a. inträdande polarisation vid stor strömstyrka, ej gå ned till för små värden på R_y. Med R_y som abskissa och $1/I$ som ordinata ritas ett diagram.

Vid ett lektionsförsök (kromsyreelement) erhöllos i bifogade tabell angivna värden.



Strömstyrkans inverterade värde som funktion av yttre motståndet.

R_y ohm	I amp	$\frac{1}{I}$
20	0,076	13,2
18	0,082	12,2
16	0,090	11,1
14	0,101	9,90
12	0,117	8,55
10	0,135	7,41
8	0,157	6,37
6	0,197	5,08

Såsom framgår av diagrammet kan man draga en rät linje i god anslutning till försökspunkterna. Härigenom visas på ett övertygande sätt, att lagen gäller samt att R_i och E verkligen äro konstanta.

Man kan också med hjälp av den räta linjen beräkna de båda konstanterna. Extrapolation till $1/I=0$, vilken visserligen saknar fysikalisk mening men är formellt möjlig, ger $R_y=-R_i$. Linjens skärning med abskissaxeln ger alltså elementets inre motstånd. Ur linjens vinkelkoefficient, $1/E$, beräknas den elektromotoriska kraften.

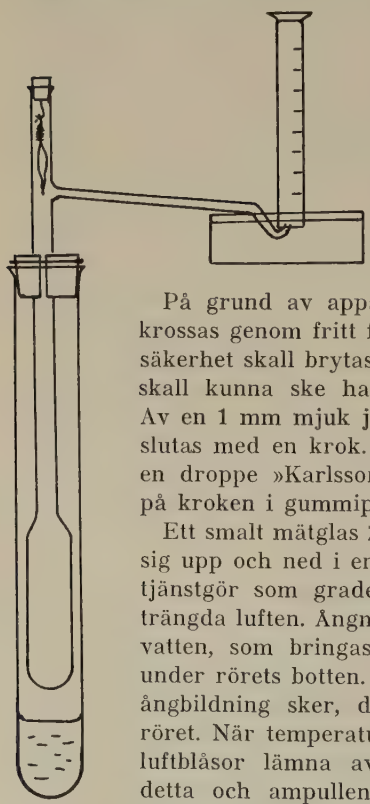
Det må framhållas, att försöket ej är bundet till någon bestämd pedagogisk framställningsgång utan kan betraktas helt enkelt som ett sätt att bestämma R_i och E. Det kan då också tjäna som illustration till den grafiska felutjämningsmetoden.

Modifierad apparat för molekylviktsbestämning enligt Victor Meyer

Av fil. dr Harry Hellström, Spånga

En enkel och lätthanterlig apparatur för laborationsuppsats kan tillverkas och sammanställas på följande sätt.

Ångmanteln utgöres av ett stort provrör 250×25 mm. Ångbildningskärlet består av ett med botten försett rör 60×20 mm, skarvat vid ett smalare 200×12 mm, upptill försett med en svagt utvikt kant; 5 cm från mynningen fastsmältes ett svagt lutande avledningsrör 7 mm i diam. och 10 cm långt. Änden är böjd till en krok som figuren visar. Det vertikala rörets mynning slutes med en gummipropp, vari en krok av koppartråd är fästad genom intryckning i gummit.



På grund av apparatens ringa höjd kan ampullen ej krossas genom fritt fall. För att spetsen på ampullen med säkerhet skall brytas av liksom även utlösningen av fallet skall kunna ske har följande lilla anordning vidtagits. Av en 1 mm mjuk järntråd lindas en tät spiral, som avslutas med en krok. Under spiralen fästes ampullen med en droppe »Karlssons klister». Järnspiralen hänges upp på kroken i gummiproppen.

Ett smalt mätglas 25 ml,[1] som, fyllt med vatten, befinner sig upp och ned i en med vatten fylld kristallisationsskål, tjänstgör som graderat uppsamlingsrör för den undanträngda luften. Ångmanteln är fylld till ca 3 cm höjd med vatten, som bringas i kokning genom en liten gaslåga under rörets botten. Lågan avpassas så, att lagom kraftig ångbildning sker, då brännaren lämnas stående under röret. När temperaturjämvikt inträtt och inga ytterligare luftblåsor lämna avledningsröret, föres mätglaset över detta och ampullen bringas att falla genom att järnspiralen lyftes av kroken med en magnet. Genom sin större levande kraft krossar spiralen ampullen mot rörets botten.

[1] Finnes ej lämpligt mätglas använder man ett smalt provrör, som rymmer ca 15—20 ml. Luftvolymen markeras med fettkrita och väges ut med vatten.

Då apparatens dimensioner äro betydligt mindre än hos de normalt förekommande apparaterna, bör ampullens innehåll avpassas därefter; $^1/_2$—$^2/_3$ millimol är lämplig mängd. Apparaten ger goda värden. Eleverna erhålla som regel värden på molekylvikten avvikande högst 1—2 % från rätta värdet.

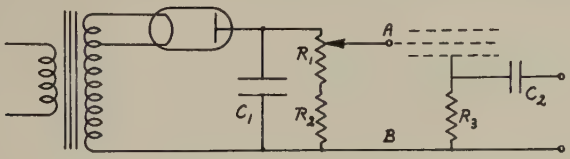
Apparaten tillverkas och försäljes av Rudolph Grave, Stockholm, och kan erhållas i enskilda exemplar eller i satser om 8 stycken.

Enkel högspänningslikriktare

Av ingenjör Stig Lindholm, Stockholm

Vid försök med bl. a. Geiger-Müllerrör och Wilsonkammare behöver man högspänd likström med omkring 1200 volt spänning. Strömförbrukningen vid försöken är mycket liten. Några tiondels milliampere är fullt tillräckligt. En enkel och billig spänningskälla, som kan anslutas till växelströmsnätet, kan man framställa på följande sätt.

Med hjälp av en liten transformator höjes nätspänningen till ca 1200 volt. Sekundärlindningen bör tåla en strömstyrka av 2 milliampere. Likriktning sker med ett elektronrör typ EY 51. Rörets glödspänning, 6,3 volt, erhålles från en särskild lindning på transformatorn.



Likriktningen är s. k. halvvågslikriktning, och likspänningen är därför starkt pulserande. Den utjämnas med en kondensator C_1 på 0,1 uF (driftspänning åtminstone 1500 volt). Likspänningen kan regleras med ett vridmotstånd R_1 på 2 megohm, seriekopplat med ett fast motstånd R_2 på 1 megohm. Spänningen mellan A och B kan därigenom varieras mellan cirka 500 volt och max.värdet.

För att man bekvämt skall kunna ansluta ett Geiger-Müllerrör (prickat i figuren) är likriktaren försedd med motstånd och kondensator härför. Tråden i G-M röret kopplas till A. Rörets cylinder förbindes över ett högt motstånd R_3 (20—50 megohm) med B. Mellan motståndets ändpunkter kan man koppla en förstärkare, om man som spärr använder en kondensator C_2 på omkring 100 pF. Som förstärkare duger en vanlig radioapparat. Inkoppling sker till de kontakter som användes vid grammofonspelning.

(Likriktaren kan erhållas från Norstedts skolavd. Stockholm. *Red.*)

Pædagogisk forsøgsarbejde i naturlære i gymnasiet

Lektor K. B. Mønsted, Köpenhamn, höll vid det av Föreningen i Lund för matem.-naturvetenskaplig undervisning anordnade höstmötet den 9 nov. 1952 föredrag över ämnet »Nogle erfaringer med gruppeundervisning og aktivitetspedagogik i gymnasiets fysik- och kemiundervisning». Förhindrad att för Elementas marshäfte skriva ett referat har lektor Mønsted vänligen ställt till red.:s förfogande en artikel med ovanstående rubrik, som han publicerat i Pædagogisk psykologisk tidsskrift 12 (1952), s. 153. Ur denna artikel återges nedan ett avsnitt, som belyser de synpunkter som framfördes i föredraget i Lund.

Jeg tror, at der kan gøres noget trods alle begrænsninger fra skolens ydre form — eksamenskrav — lærebøgernes ensidighed og alle de andre unskyldninger, som jeg også bruger for at forsvare, at jeg ikke har gjort mere. Fysik og kemi for matematikerne har måske særlige muligheder, fordi vi har et ret stort timetal, som ind imellem godt kan bruges til koncentrationslæsning, og vi har dobbelte øvelsestimer, måske endda med delte klasser.

For flere år siden gjorde jeg i nogle klasser forsøg med gruppearbejde i varmelære, når vi lidt hurtigere end normalt og med lidt færre elevøvelser var kommet igennem det grundlæggende stof. Eleverne — delt efter eget valg i grupper på 2—3—4 — valgte et specialemne med udgangspunkt i de praktiske anvendelser af varme, f. eks. opvarmning og isolation i beboelseshuse. Moderne opvarmning ved strålevarme. Varmeakkumulator. Dampens anvendelse i maskiner. Varmeenergikilder. Anvendelser i meteorologien. Varmelærens historiske udvikling o. a.

Det lykkedes ved at lade eleverne gennemtravle biblioteker at finde en række artikler, som de med lidt tilskrifter og ordforklaringer kunne læse. Det var fra avsnittet »Teknikkens vidundere» i samlingsværket »Gry» og tidskrifterne: »Fysisk Tidsskrift», »Naturens Verden», »Ingeniøren», »Varme» — de två sistnämnda utg. av Ingeniørssammenslutningen, resp. av Teknologisk institut (red.).

I en måned gennemdiskuterede grupperne i de almindelige timer deres læsning og tilrettelagde forsøgsplaner til øvelsestimerne. Forsøgene var gennemgående så enkle, at de selv kunne kombinere opstillingerne af forhåndenværende apparatur uden specielle forsøgs-

vejledninger. Grupperne udarbejdede en fælles skriftlig rapport og et kort referat, som de mundtligt forelagde for den samlede klasse.

Det faglige udbytte var, at eleverne alt efter dygtighed fik et meget godt overblik over deres emne. De fik — som jeg kontrollerede ved nogle senere skriftlige prøver — også et alment indtryk af kammeraternes opgaver, men de formåede kun i enkelte tilfælde at gennemføre en lignende minutiøs logisk behandling af stoffet, som vi bruger i timerne og i lærebøgerne.

Det arbejdsmæssige resultat: Til at begynde med var de fleste kun interesseret i deres eget afsnit af opgaven, og det kneb for dem at få en virkelig diskussion og udspørgen af hinanden i gang. Men efterhånden som de opdagede, at de var afhængige af hinandens præstationer, blev de ivrige for en fastere arbejdsorganisation. Det foregik ikke uden stridigheder, men de fleste blev klaret uden lærerens indgreb. Den selvfølgelig tilladte vej, at bede læreren løse vanskelige problemer, blev sjældent overdrevet, ligesom eleverne mindre end venteligt »snyltede» på de mere arbejdssomme blandt dem.

Der blev en stærk stigning i interessen for at læse — at få fortalt om fysiske problemer, som blev berørt f. ex. i dagspressen, og med en enkelt undtagelse var man ked af at forlade gruppearbejdet igen.

Planlæggelsen af øvelserne syntes at samle gruppen bedst til et fornuftigt fællesarbejde, og det fik mig til med nogle senere klasser at lade dem gennemarbejde selve lærebogsstoffet i grupper, således at de selv skulle finde frem til og planlægge passende opgaver og eksperimenter med stoffet.

Det var de meget interesserede i — ingen benyttede »nødvejen» at slå op i øvelsessamlinger — men de var hæmmet af store vanskeligheder ved simpelthen at forstå lærebogens sprog og på egen hånd sætte sig ind i dens matematiske symbolik. Derfor gik det meget langsomt.

Man kan blive utålmodig og bange for på uforsvarlig måde at have spildt tiden, når det går sådan — men alt i alt tror jeg altid den særlige stemning, som ledsager forsøgsarbejde, det at det både fra lærernes og elevernes side er mere levende, giver mere valuta på en eller anden måde. Jeg mener bl. a. at disse elever under det senere traditionelle arbejde efter lærebøger var mere bevidste og planmæssige i tilegnelsen.

Mine øvrige forsøg har været meget mere kortvarige og spredt over alle tre gymnasieår — noget tilfældige, ofte ganske improviserede, men hovedlinjen har været at samle noget stof omkring et anvendelsesområde, og lade eleverne selv være med i planlæggelse, øvelsesarbejde og diskussion, således at deres interesse i emnet bestemte

retningen og omfanget af arbejdet — ikke mine på forhånd stillede krav.

Som et eksempel kan nævnes, at vi efter en forespørgsel om »de nye sulfosæber» blev enige om at bruge nogen tid til at samle os om »rensningens problemer». Til første time havde man læst væsentlig i kemibogen om vand og sæbe o. l., og andre havde fundet metoder til bestemmelse af overfladespænding i vædsker i fysikbogen. Der blev organiseret flg.: Øvelsesgruppe 1. Vaskeprøver på uld og bomuld med sæbeopløsninger af forskellig koncentration og temperatur. 2. Tilsvarende for sulfosæber. 3. Måling af overfladespænding i de forskellige opløsninger. 4. Måling af hårrørsvirkninger af de forskellige opløsninger, og 5. Dråbetælling i vædskerne.

Derefter fulgte et par timers diskussion først af den teoretiske sammenhæng mellem de forskellige resultater, så af rensningsproblemer på bredere basis også som et samfundsproblem.

Det føles ved en sådan behandling hurtigt som en hæmning, at vi som helhed må indskrænke diskussionen til det fysisk-kemiske og bøje af, når vi kommer til f. ex. biologiske, økonomiske og sociale områder.

Aktuellt

Tekniska Museets Atomarium

Atomarium är en helt nyskapad benämning på en »levande utställning», som ordnats på Tekniska Museet och byggts upp kring en samling apparater och modeller, huvudsakligen av civilingenjör Torsten Wilners konstruktion, för att på lättfattligt sätt belysa grunddragen ur atomfysiken med särskild hänsyn till atomkärnans byggnad och egenskaper.

Museet äger ett fältelektronmikroskop (Elementa 35, 1952, s. 101), medelst vilket kristallers och molekylers byggnad på enkelt sätt åskådliggöres såsom diffraktionsbilder med mycket hög förstoringsgrad. Elektronernas energiförhållanden demonstreras genom olika försök med lysfärg. Atomkärnornas byggnad och egenskaper belysas med hjälp av modeller av olika slag. Bland dessa må särskilt nämnas en anordning med fjädrande och pendlande magneter, vidare utvecklad efter en i Elemnta redan beskriven apparat (35, 1952, s. 215), som — visserligen på ett mycket förenklat sätt — påtagligt illustrerar ett antal olika kärnprocesser. En annan apparat visar principen för mätning av magnetisk kärnresonans. Atomkärnornas energi visas genom ett bindningsenergidiagram, utfört med ett vattenfyllt rör, där vatten som tappas ut från olika nivåer får representera den energi som kan utvinnas genom olika kärnreaktioner.

Till apparatsamlingen hör slutligen en apparat för direkt iakttagelse av radioaktivt sönderfall med hjälp av en scintillationsskärm av större format än vad ett vanligt spintariskop erbjuder (Elementa 33, 1950, s. 239), samt en kontinuerligt arbetande diffusions-Wilsonkammare (enl. Langsdorf), där partikelspår från radioaktiva preparat och kosmisk strålning ständigt kunna iakttagas. Det är väl fullt i sin ordning att vid föredragen en »svart» tavla användes, där figurer och beräkningar ritas med lysande skrift på ett lysfärgsbemängt plastskikt — också ett sätt att låta elektronernas energi direkt medverka vid demonstrationerna. Avsikten är att successivt söka utöka apparatbeståndet, bl. a. med inriktning på den praktiska användningen av atomenergi och radioaktiva isotoper.

Atomariet invigdes den 30 januari i år i närvaro av ett stort antal representanter för forskning och undervisning. Dess tillkomst är ett nytt bevis på den stora initiativrikedom och förmåga att omsätta idéerna i verklighet, som utmärker museets ledning och dess skickliga medarbetare.

Efter särskild överenskommelse demonstreras samlingen med korta föredrag för studiegrupper och andra sammanslutningar. Liknande föredrag hållas även inom andra naturvetenskapliga eller tekniska områden. Museets adress är Tekniska Museet, Stockholm Ö, tel. 670855.

Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning

höll sitt årsmöte i Stockholm den 3—5 januari 1953. Den första dagen ägnades åt ett studiebesök hos Scania-Vabis i Södertälje, där man besåg den omfattande och välorganiserade fabrikationen.

Årsmötesförhandlingar ägde rum söndag morgon på Byggnadsföreningen i Stockholm, varvid komplettering av styrelsen skedde och till ordförande omvaldes lektor Ernst Knave, Stockholm. Lektor Karl Persson lämnade meddelande om Nordisk Matematisk Tidskrift och rektor Torsten Wetterblad informerade de närvarande om sin nya befattning som Skolöverstyrelsens konsulent i fysik. Härefter vidtog diskussion om geometriundervisningen i realskolan med inledningsanföranden av föreningens nordiska gäster, rektor Paul Rubinstein, Köpenhamn, lektor Björn Rudberg, Hamar och skolrådet Viljo Laine, Helsingfors samt av rektor Sigurd Åstrand, Stockholm. Tiden tillät endast en ganska kort diskussion. I denna deltogo undervisningsrådet C. E. Sjöstedt, rektor Rubinstein och rektor E. Lunell, Skellefteå. — Det är möjligt att Elementa senare kan bli i tillfälle ge en resumé av inledningsanförandena och diskussionen.

Senare på dagen demonstrerade lektor Alf Heimer, Göteborg, en ny optisk bänk, läroverksadjukt John Stenman, Uppsala, höll föredrag

om »Mätning av korta tider med växelström» och Dr. Max Schmidt, Hamburg, redogjorde för och demonstrerade en intressant nykonstruktion, »Kolbenprobengeräthe», med vars hjälp man kan mäta gasvolymer utan spärrvätska. I Elementa komma hrr Heimer och Stenman att i uppsatser redogöra för sina apparater och experiment. En beskrivning av Dr. Schmidts apparatur kommer även att inflyta i tidskriften.

På måndagen höll docent Sigvard Eklund, Stockholm, föredrag om »Aktuella problem i samband med utvinningen av atomenergi. I senaste bandet av Kosmos (bd 29, 1952) finner läsaren en utmärkt uppsats om detta ämne skriven av föredragshållaren.

I programpunkten »Strålningsförsök i atomfysiken» medverkade lektor Knave, ingenjör Stig Lindholm och civilingenjör Torsten Wilner. Ing. Lindholm beskriver i detta häfte, s. 35, den av honom konstruerade apparaten för åstadkommande av likriktad högspänning. Ing. Wilner kommer senare att visa, hur man med enkla medel tillverkar den Wilsonkammare som han förevisade.

Efter lunchen redogjorde undervisningsrådet Ragnar Lundblad för den nya gymnasieorganisationen, och till slut förevisade lektor Carl-Gustav Danver, Stockholm, av honom sammanställda filmband för undervisningen i astronomi.

Årsmötesprogrammet var som synes rikhaltigt och värdefullt. Otvivelaktigt hade det givit väsentligt större behållning, om mötet hade kunnat förläggas till en lokal, bättre lämpad för demonstrationer och experiment. Anslutningen var god. Drygt 150 medlemmar hade mött upp.

Industriens Upplysningstjänst inbjuder till sin åttonde industrikurs

Svensk industri har under de senaste årtiondena kommit att intaga en alltmer framträdande och betydelsefull ställning inom vårt lands näringsliv. Det är därför naturligt, att det måste vara av intresse för lärare i bl. a. geografi och kemi vid läroverk, seminarier och folkhögskolor att erhålla aktuell orientering rörande industrien i Sverige och dess problem.

Tack vare ekonomiskt bidrag från centrala industriorganisationer har det varit möjligt för Industriens Upplysningstjänst att anordna studiekurser för lärare åren 1946—1952, vardera omfattande en veckas industribesök och föreläsningar. Årets lärarkurs kommer att beröra ett antal kemiska fabriker, och Upplysningstjänsten inbjuder därför 40 kemilärare att under veckan 22—27 juni 1953 medfölja på en resa i Mellansverige. Upplysningstjänsten svarar för alla kostnader med undantag av fördelade resekostnader, vilka torde uppgå till ca 50 kr.

Praxis der Physik, Chemie und Photographie

im Unterricht der Schulen

Erscheinungsweise monatlich, Umfang 40 Seiten, reich illustriert, Bezugspreis im Quartal (3 Hefte) 4.50 DM + Zustellgebühr.

Für Studienreferendare und Studierende ermässigter Bezugspreis 3.15 DM je Quartal nur bei direktem Bezug vom Verlag.

Probenummern stehen auf Anforderung zur Verfügung.

Im Jahre 1952 wurden u. a. folgende Original-Veröffentlichungen herausgebracht:

PHYSIK

Elektrische Wechselspannungen mittels Staubfiguren
Ultraschallversuche (Katakaustika)
Schulversuche zur Radioaktivität
Bau einer Nebelkammer
Ionenwanderung im Schulversuch
Herstellung von Polarisationsfiltern im Unterricht
Vektographen (Polarisationsanaglyphen)

CHEMIE

Elektronentheorie im Chemieunterricht
Kunststoffe im Unterricht
Farbstoffe im Schulversuch
Schaumstoffe
Chemische Unterrichtsversuche aus Aufbauteilen
Strukturformel des Äthanols

AULIS VERLAG, Frankenberg/Eder
(West-Deutschland)

SVENSKA FYSIKERSAMFUNDETS PUBLIKATION

KOSMOS

band 30 har utkommit med följande innehåll:

1. 1952 års nobelpristagare i fysik. Av fil. lic. Sven Lennander.
2. Vilhelm Bjerknes och hans livsverk. Av professor Tor Bergeron.
3. Radioastronomi. Av docent N. Herlofson.
4. Spektrofotometriska ultramikrometoder inom cellforskningen. Av professor T. Caspersson och med. lic. B. Lindström.
5. Industriell användning av radioaktiva isotoper. Av fil. kand. Rolf Björnerstedt.
6. Atomreaktorn: forskningshjälpmedel och energikälla. Av docent Sigvard Eklund.
7. 225-cm cyklotronen i Stockholm. Av fil. lic. Hugo Atterling.
8. Synkrocyklotronen i Uppsala. Av civilingenjör Bengt Hedin.
9. Den fotografiska plåten som kärnfysikaliskt hjälpmedel. Av fil. lic. Gösta Ekspong.
10. Kärnfysikalisk mångkanalapparatur. Av tekn. lic. Guy von Dardel.

Register till bd 1—30 (åren 1921—1952).

Boken tillställes samfundets medlemmar *inbunden* jämte kvitto på medlemsavgift som postförskottsförsändelse å kr. 12:—. Medlemskap erhålles efter hänvändelse till **Fil. lic. Sven Lennander, Fysikum, Uppsala.** Även institutioner och bibliotek antagas som medlemmar.

Samfundets medlemmar kunna i mån av tillgång erhålla bundna exemplar av äldre Kosmos-band till ett pris av 10 kr per styck, bd 27 och senare à 12 kr, inklusive porto.

Insänd litteratur

F. B. SEELY—J. O. SMITH, *Advanced Mechanics of Materials.* Sec. Ed. J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1952, Pp. 680, $ 8.50.

L. H. C. TIPPETT, *The Methods of Statistics.* 4th Ed. J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1952, Pp. 395, $ 6.00.

RAYMOND L. WILDER, *Foundations of Mathematics.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1952, Pp. 305, $ 5.75.

PECK—HANSON—THORNBURN, *Foundation Engineering.* J. Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London 1953, Pp. 410, $ 6.75.

J. G. FEINBERG, *The Atom Story.* Wingate, London 1952, Pp. 243, 15 s. net.

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique.* Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Hermann & Cie, Paris 1953, 123 p., 1500 fr.

S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes régularisation des suites applications.* Gauthier-Villars, Paris 1952, 277 p., 4000 fr.

Deuxième colloque de géométrie algébrique. G. Thones, Liège, Masson & Cie, Paris 1952, 244 p., 2625 fr français.

Y. ROCARD, *Thermodynamique.* Masson & Cie, Paris 1952, 551 p., 3600 fr (broché), 4150 fr (cartonné).

E. O. VON LIPPMANN, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik.* Band II. Verlag Chemie, 1953, 353 S., DM 21.80.

H. EWALD—H. HINTENBERGER, *Methoden und Anwendungen der Massenspektroskopie.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr. 1953, 288 S., DM 25.60.

GATTERMANN—WIELAND, *Die Praxis des organischen Chemikers.* 34 Aufl. Walter de Gruyter, Berlin 1952, 411 S., DM 26.—.

G. HERDAN, *Small particle statistics.* Elsevier Publishing Company, Amsterdam 1953, Pp. 520, 70 s.

Skolefysik, Forsøgssamling for lærere. Redaktion: Sv. Olsen. Gyldendals Boghandel, Nordisk Forlag, København 1953, 72 s., dkr. 12: 50.

JOHANNES MALMQUIST, VALDEMAR STENSTRÖM, STURE DANIELSON, *Matematisk analys,* Del III. Partiella differentialekvationer, Variationskalkyl, Fourierserier, Integralekvationer. Natur & Kultur, Stockholm 1953, 600 s., inb. kr. 85: —.

E. T. GLAS, *Radioteknik.* Del I, 319 s., kr. 32: 50. Del II, 280 s., kr. 35: —. Ljus förlag, Stockholm 1951 och 1952.

E. T. GLAS, *Växelströmslära.* Natur & Kultur, 1952, 232 s., kr. 16: 50.

ARNE ELFVING och BERTIL ENGLUND, *Kemi för kommunala flickskolor.* Natur & Kultur, Stockholm 1952, 99 s., kr. 3: 50.

C. E. SJÖSTEDT—W. SJÖSTRAND, *Skola och undervisning i Sverige och andra länder.* Natur & Kultur, Stockholm 1952, 350 s., kr. 18: —.

G. AHLMAN—G. KARLSSON, *Lärobok i kemi och materiallära.* Gleerups förlag, Lund 1952, 214 s., kr. 6: —.

Dagobert spränger atomen. Övers. P. A. Norstedt & Söner, Skolavd., Stockholm 1952, 30 s., kr. 3: 40.

S. LINDSTRÖM, *Studieplan i matematik för klasserna 1—3.* Almqvist & Wiksell, Stockholm 1952, 93 s., kr.

G. LINDHE, *Studieplan i kemi för enhetsskolan,* Almqvist & Wiksell, Stockholm 1952, 48 s., kr. 3: 75.

HJ. NILSSON—F. WIGFORSS, *Matematikens element: Algebra I.* Almqvist & Wiksell, Stockholm 1953, 262 s., kr. 16: 50.

E. ODELIUS, *Övningsuppg. i algebra, planimetri och stereometri.* För realskolan. Sv. Bokförl. (Bonnier), Stockholm 1952, 90 s., kr. 3: 75.

Till samtliga medlemmar av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning och till Föreningen i Lund för matematisk naturvetenskaplig undervisning kommer inbjudan att utsändas senast den 1 april, varefter ansökan skall insändas till Upplysningstjänsten.

Skandinavisk matematikerkongress 1953

Den 10—14 augusti 1953 anordnas i Lund den tolfte skandinaviska matematikerkongressen. Den första kongressen av denna art hölls i Stockholm 1909. Efter det sista kriget har kongresser hållits i Köpenhamn 1946 och i Trondheim 1949, varefter Sverige står i tur att vara värd.

Kongressen planlägges av ett av Svenska nationalkommittén för matematik utsett arbetsutskott bestående av professorerna O. Frostman, L. Gårding och Å. Pleijel samt docenten G. Borg.

Anmälningstiden utgår den 15 maj och intresserade kan rekvirera inbjudan med utförligare upplysningar från kongressens sekretariat, adr. t. o. m. $^{31}/_{5}$: Institutionen för matematik, K. Tekniska högskolan, Stockholm 70.

Åttonde nordiska kemistmötet

hålles i Oslo 14—17 juni 1953. Preliminär anmälan om deltagande bör göras snarast; anmälan, ej återkallad senast 15 maj, betraktas som definitiv. Cirkulär nr 1 med anmälningsblankett kan erhållas från sekreteraren för den svenska mötesbestyrelsen tekn. lic. Bengt Sandberg, postfack 30017, Stockholm 30. Efter mötet anordnas exkursioner.

Notiser

Pipett med ventil

Elever på skolstadiet ha oftast svårt att använda pipetten på rätt sätt. När vätskan uppsugits, tillslutes pipetten med fel finger, vanligen tummen i stället för pekfingret. Vätskan avtappas till delstrecket med pipetten snett ställd och felplacerad i förhållande till ögonen. Ofta är det ej så kinkigt med inställningen. Så flyttas pipetten, krampaktigt tillsluten, och i sned ställning med förlust av en eller annan droppe, till ett kärl ett stycke bort för att till sist tömmas fortfarande snett hållen.

Pipettens användning underlättas och ger säkrare resultat, om man upptill förser den med samma sorts ventil, som användes vid enkla byretter, nämligen en kort ligatur med en glaspärla och ett kort

glasrör. Kautsjukslangen kan vara 5 cm lång med en inre diameter av 5 mm, en yttre av 8 mm. Glaspärlans diameter bör då vara 6 mm.

Arbetet med en på detta sätt förlängd pipett behöver ej beskrivas. Man vinner härmed: att man slipper den svåra uppgiften att använda fingret som ventil, att man kan ställa in vätskan med pipetten i lodrät ställning, att man kan flytta den fyllda pipetten hur långt som helst utan förlust, att man kan variera utloppshastigheten.

Mycket små pipetter, 1—2—3 ml, äro i regel så smala att de inte passa till den ovan angivna slangdimensionen. Sådana pipetter böra skarvas, genom ansmältning, med ett kort, vidare rör; de bli därigenom även lättare att begagna på vanligt sätt. *G. Starck*

Färgade joners vandring i det elektriska fältet

demonstreras enkelt (försöket utföres lämpligast som laborationsövning) på följande sätt, länge använt vid ett av Stockholms läroverk. På ett torrt filtrerpapper, 10×10 cm, dragas med olika färgkritor streck på mitten, parallella med en av sidorna. Papperet blötes med vattenledningsvatten och lägges på en lika stor glasskiva. På de kanter av papperet, som äro parallella med kritstrecken placeras två smala elektroder av stanniol eller aluminiumfolium, som med klämmare av något slag ges en tillräcklig likströmsspänning, event. belysningsnätet med en förkopplad lampa som skydd mot kortslutning. Efter en liten stund ser man kritstrecken diffust breddas mot anoden men förbli skarpa mot katoden. *Erik Löwenhamn*

Olika glassorters löslighet och — som följd därav — användbarhet

Nybörjaren tror gärna, att glas inte påverkas det minsta av kemikalier. Det kommer därför som en överraskning, att vissa glassorter tydligt lösa sig t. o. m. i vatten. I samband med genomgången av glastillverkning bör man inte försumma att visa denna löslighet t. ex. genom följande försök.

1. Pulvrisera litet fast vattenglas i mortel med vatten och en indikator, bäst fenolftalein eller Yamadas indikator.
2. Riv litet glasull på samma sätt med vatten och fenolftalein.
3. Samma försök med ett prov av sodaglas.
4. Fukta den oglaserade utsidan av en porslinsskål med en fenolftaleinlösning (0,05 g fenolftalein löst i 50 ml etanol eller metanol + 50 ml vatten) och låt belägget torka helt. Vid undersökning av olika glassorter andas man först kraftigt mot ytan några gånger, varvid den tar upp tillräckligt med fuktighet. Den fuktade ytan rives med ett prov av glaset. Sodaglas ger ett tydligt rött streck, bättre glassorter i varje fall intet rött, möjligen ett något gråsvart streck.

För glasblåsaren kan detta enkla prov vara till gagn, om hans glasprover inte äro på annat sätt märkta.

E. Löwenhamn, T. Wilner

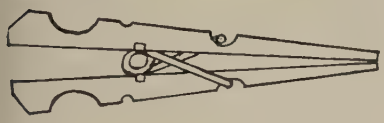
Mangans oxidationstal

och speciellt övergången från högre till lägre demonstreras ofta med hjälp av tre lösningar med avtagande pH-värden. I en och samma lösning kan försöket utföras på följande sätt.

I en stor (2-liters)kolv, placerad på vitt underlag, hälles vatten+ +NaOH och permanganatlösning till ganska svag färg. En utspädd lösning av natriumsulfit tillsättes sakta tills grön lösning, Mn(VI), erhålles. Ett stort överskott av sulfit reducerar till Mn(IV), om lösningen inte är för starkt alkalisk. Vid surgörning fortsätter reduktionen till Mn(II). *Erik Löwenhamn*

Klädnypa blir pincett

Hur det går till visar signaturen Å. Th. i Lidingö Fotoklubbs medlemsblad, nov. 1952, där han presenterar vidstående figur, som helt talar för sig själv. Sign. är fotograf. Han behövde flera pincetter vid kopiering, och så gjordes den lilla uppfinningen, som man osökt placerar under rubriken »Kolumbi ägg» och som kan göra nytta i många sammanhang.



Lysplast

Vaxdukslikнande plastväv med inblandad lysfärg finnes nu att tillgå i handeln. Materialet användes för skylt-, markerings- och dekorationsändamål, för tillverkning av lysande bokstäver, leksaker m. m.

Det lämpar sig även för undervisningsändamål. Beroende på användningsområdet kunna olika kvaliteter väljas. Vissa av dem ge mycket intensiv men kortvarig efterlysning, sedan de aktiverats med en vanlig lampa; andra ha längre lystid med lägre intensitet. En »svart» tavla, lämplig att använda i mörker (exempelvis vid experiment som fordra mörker eller i samband med visning av skioptikonbilder), kan bestå av en lamellträskiva, överklädd med lysplast. På denna kan man skriva eller rita lysande figurer med hjälp av en något modifierad ficklampa, eller bättre med en transformatordriven »lyspistol». Lampan omgives av en liten reflekterande cylinder som begränsar och intensifierar ljusknippet.

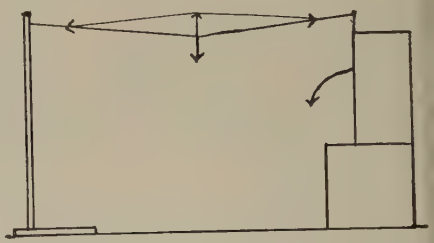
Åtskilliga intressanta experiment visande lysfärgernas egenskaper, inverkan av ultraviolett eller infraröd strålning, energinivåerna hos atomernas elektronhöljen, värmerörelsens inverkan m. m. kunna göras

direkt på skärmen. En antydan om dessa möjligheter finnes i T. Wilners uppsats »Självstudier med experiment» i Sv. Fysikersamfundets publikation Kosmos, 1951. Intressant är också möjligheten till »skuggfotografering», som snabbt göres på skärmen med hjälp av en kraftig lampa eller en fotoblixt. En skärm av detta slag finnes i Tekniska Museets Atomarium. Vidare upplysningar kunna fås genom ingenjörsfirman Lumino, Odengatan 74, Stockholm, som även uppger namn på återförsäljare. *T. Wilner*

Kraftparallellogrammen

Två stora krafter, som bilda nära 180° vinkel med varandra, ge en liten resultant. Omvänt kan en liten kraft ha stor verkan. På många sätt kan detta visas. Ett par är följande.

Ställ en mindre låda eller klots på en annan (se fig) och spänn ett snöre från en krok på den övre till ett stativ eller annat stöd och belasta snöret. Det behövs bara en liten tyngd för att den övre klotsen skall tippa över.



Krydda sedan försöket med berättelsen om den unga frun, som ville torka tvätt i matsalen och fäste strecket i »knoppen» överst på en tvådelad buffé med resultat att överskåpet med glas och porslin kapsejsade. Hade damen läst fysik?

Ett annat exempel anföres ur en nyligen på Gyldendals Forlag i Köpenhamn utkommen bok: *Skoleforsøg, Forsøgssamling for lærere* (72 s., dkr. 12:50). Adjunkt Frode Hjerting beskriver där en trevlig anordning.

A och *B* äro två klotsar, gjorda som fig. visar av två sammanspikade bräder; *C* och *D* äro två träskivor förenade med gångjärn vid *E*. Ett starkt snöre, som inte två pojkar kunna rå på, fästes i krokarna, så att *C*—*D* intar i fig. angivet läge. Man trycker vid *E*. Skulle snöret ej ha gått sönder, då *C*—*D* nått horisontellt läge, lägger man en liten ribba vid *F* och gör om försöket. Till skydd för handen lägger man en träbit över *E*. *C. E. B.*

Bokanmälningar

O. Kempthorne, *The design and analysis of experiments.* Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1952, Pp. 631, $ 8.50.

R. L. Anderson and T. A. Bancroft, *Statistical theory in research.* McGraw Hill, New York 1952, Pp. 399, $ 7.00.

C. H. Goulden, *Methods of statistical analysis.* Wiley and Sons, New York, Chapman and Hall, London, 1952, Sec. Ed., Pp. 467.

Det är väl bekant, att statistiker syssla med diagramritning och med bearbetning av siffermaterial. Mindre känt torde det vara, att även planering av försök kommit att bli ett viktigt område inom den moderna statistiken. Vid alla experiment, där mer eller mindre slumpartade störningar påverka försöksresultatet eller där olika faktorer systematiskt skola varieras, är det av avgörande betydelse, att försöken planeras så, att ett pålitligt resultat uppnås med ett så litet antal försök som möjligt.

Det föreligger för närvarande ett stort antal försöksplaner, som kunna användas på de mest vitt skilda områden. För denna tidskrifts läsare torde möjligheten att planera försök på det naturvetenskapliga området med statistiska metoder vara av speciellt intresse.

Litteraturen på området har länge varit sparsam. Ett arbete av Cochran-Cox har tidigare recenserats i denna tidskrift[1] och är numera ett erkänt huvudarbete, när det gäller försöksplanering.

Av de tre böcker, som ovan rubriceras, är Kempthorne's arbete det mest omfattande. Det är ett värdefullt komplement till boken av Cochran-Cox för den, som vill grundligt sätta sig in i det matematiska underlaget. Boken är bitvis svårläst och bör betraktas som ett specialarbete för den utbildade statistikern. Kompositionen är något löslig, och boken hade vunnit på en detaljerad översyn före publiceringen. Exempelvis är sakregistret uppgjort med stor nonchalans.

För matematikern är Anderson-Bancroft's eleganta framställning en angenäm spis, för den matematiske statistikern ger den en briljant översikt över de teorier, som ligga till grund för de moderna försöksplanerna, och som man tidigare med en viss möda fått arbeta sig sig igenom. Boken är mycket koncist skriven. Exempelvis definieras det grundläggande begreppet random sample på följande sätt: a random sample is a sample drawn in such a manner that the probability of obtaining any member is independent of the probability of obtaining any other member. Den som går miste om inne-

[1] Elementa *33* (1950) 262.

börden av denna definition kan inte reparera skadan utan lämnas åt sitt öde. Riskabel pedagogik! Ett mycket trevligt inslag i boken utgöra de förteckningar över olösta problem, som författarna generöst ha fogat till några kapitel.

För den praktiskt arbetande forskaren äro de båda hittills omnämnda arbetena av föga intresse (utom för den som föresatt sig att sätta sig in i grunderna). Goulden's bok, som utkommit i omarbetad form (första upplagan kom 1939), torde passa praktikern bättre. Den ger en i stort sett lättläst översikt över den moderna försökstekniken. Exemplen äro mestadels hämtade från växtförädlingens område. S. k. icke ortogonala försök behandlas mycket förtjänstfullt. En anmärkning kan riktas mot bokens inledande fyra kapitel, som innehålla en dålig behandling av de grundläggande statistiska begreppen. En grundlig omarbetning av denna del hade varit på sin plats.

Matematiker och statistiker ha i de tre böckerna fått värdefulla hjälpredor, icke minst på grund av de rikt flödande litteraturhänvisningarna. Ännu saknas dock den bok, som man odelat kan rekommendera den forskare, som vill planera och analysera sina försök i enlighet med moderna statistiska metoder. Uppgiften att skriva en sådan bok är lika svår som den är angelägen. *Gunnar Blom*

A. Vogel, *Klassische Grundlagen der Analysis.* Hirzel Verlag, Leipzig 1952, 194 S., DM 8.50.

I denna bok framställes talbegreppets axiomatiska uppbyggnad enligt klassiskt recept. Modernare, mer filosofiskt betonade undersökningar behandlas icke.

De naturliga talen införas såsom elementen i en numrerbart oändlig mängd, som uppfyller Peanos axiomsystem. Vidare definieras operationer, som svara mot de fyra räknesätten. Systemet tillåter icke ett obegränsat utförande av operationerna (t. ex. division). Det blir därför nödvändigt att företaga successiva utvidgningar av talsystemet, innan man slutligen kommer till de reella talen som ett system, vilket är slutet och fullständigt under de fyra räknesätten och limes-operationer.

Praktiskt taget hela boken ägnas åt en synnerligen grundlig och detaljerad behandling av dessa utvidgningar. Framställningen är helt elementär och fordrar (formellt!) inga egentliga förkunskaper. Författaren lägger ned stor omsorg för att få framställningen klar och redig, nya begreppsbildningar ställas i sammanhang med redan införda, och tankegångarna bakom de abstrakta resonemangen belysas utmärkt. De olika begreppen hållas väl isär, och läsaren får också hjälp därmed genom olika förtydliganden och påpekanden (t. ex. om de »nya» talens karaktär av klasser). — Alla utvidgningar ske efter

samma mönster (som författaren också visar i ett mindre elementärt avsnitt, sid. 83—91), vilket tillsammans med framställningens grundlighet i viss mån verkar tröttande. För att få riktigt utbyte av boken fordras därför en viss förmåga hos läsaren att själv kunna välja ut det väsentliga, en egenskap som kanske inte alltid uppträder tillsammans med små förkunskaper.

Läst på rätt sätt ger boken en god orientering i det intressanta ämnet och bör kunna ge värdefulla synpunkter för exempelvis blivande lärare. *Magnus Tideman*

LEMAN-SCHOENEBERG, *Vom periodischen Dezimalbruch zur Zahlentheorie*, 3. Aufl. (Math.-phys. Bibl. I: 19) B. G. Teubner, Leipzig 1952, 60 S., DM 2.10.

Föreliggande häfte är en bearbetning av A. Lemans skrift med samma titel, tryckt 1916. De periodiska decimalbråkens viktigaste egenskaper kan som bekant härledas ur Eulers generalisation av Fermats s. k. lilla sats. Förf. utgår omvänt från de periodiska decimalbråken och visar hur studiet av dessa bråk leder fram till en rad problemställningar tillhörande den elementära talteorien. Avsikten är att på detta sätt ge de talteoretiska satserna ett konkret innehåll. Den välskrivna lilla boken innehåller det väsentligaste i de tre första avsnitten av Gauss' Disquisitiones Arithmeticae. *Per Häggmark*

G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD—G. PÓLYA, *Inequalities*. Cambridge University Press 1952. Pp. 324, 27s. 6d.

Första upplagan av denna bok utkom 1934, och den torde vara känd och uppskattad av varje matematiker. I nu föreliggande andra upplaga ha praktiskt taget inga förändringar av texten företagits, däremot ha några noter lagts till, bl. a. en byggande på G. O. Thorins konvexitetsundersökningar (ref. i Elementa 1948, s. 193).

Första hälften av boken kretsar kring de »grundläggande» olikheterna: Hölders och Minkowskis olikheter samt satsen om de aritmetiska, geometriska och harmoniska medelvärdena. De belysas från en mångfald synpunkter. Framställningen är ytterst förnämlig och samtidigt »elementär» (dvs. utan vidare begriplig för en läsare med t. ex. ettbetygskunskaper i matematik). Det är vetenskaplig litteratur, när den är som bäst. Senare hälften av boken upptar, utan systematik, diverse aktuella problem i fråga om olikheter, vilka stå i relation till den förra delen. En omfattande litteraturlista avslutar den utmärkta monografien. *Sven Hilding*

JOHN M. BLATT and VICTOR F. WEISSKOPF, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, Chapman and Hall Ltd., New York and London 1952, Pp. 864, $ 12.50.

Eftersom vi ännu inte känner de fundamentala lagar, som djupast reglerar alla kärnfenomen, har kärnteorien hittills kommit att utformas som fristående brottstycken med mer eller mindre lösligt sammanhang. Behovet av sammanfattande framställningar är följaktligen mycket stort, och Blatts och Weisskopfs bok i teoretisk kärnfysik utgör därför ett synnerligen välkommet bidrag på läroboks- och handboksstadiet.

Blatt och Weisskopf ger en översikt över de viktigaste *semiempiriska kärnteorier*, som uppställts för att förklara de väsentliga experimentella erfarenheterna och vilka nu mer eller mindre framgångsrikt används för att förutsäga och kontrollera kärnreaktioner. På ett undantag när begränsar sig boken till vad som brukar kallas »klassisk kärnfysik», dvs. till kärnfenomen där de ingående energiomsättningarna understiger 50 MeV. Boken utelämnar helt de rent teoretiska mesonteorierna, liksom rena tillämpningar av typen reaktorfysik.

Boken inleds med ett kapitel om kärnornas allmänna egenskaper, och därefter följer en avdelning på fyra kapitel om två-, tre- och fyrkropparproblemen och de olika typerna av kärnkrafter. Nästa avdelning ägnas kärnspektroskopi, och i samband med frågan om kärnornas struktur behandlas den uniforma modellen, en-partikelapproximationen, α-partikelmodellen och droppmodellen. Följande avdelning på tre kapitel ägnas kärnreaktionerna, deras teori och dennas förhållande till erfarenheten. Slutligen följer en avdelning som handlar om kärnornas sönderfall, spontan radioaktivitet, växelverkan med det elektromagnetiska fältet och β-sönderfallet. Sista kapitlet handlar om den nu mycket aktuella skalmodellen. Varje kapitel avslutas med en förteckning över förekommande matematiska symboler och deras betydelse, vilket gör boken särskilt användbar som handbok. Referenslistan är omfångsrik, och även om den icke gör anspråk på att vara fullständig med avseende på artiklar tryckta utanför U. S. A., synes den innehålla flertalet av de viktigaste arbetena.

Boken behandlar ett material, som genom upptäckten av nya fenomen och nya principer ibland förändras från dag till dag. En del kapitel måste därför nödvändigtvis förlora i aktualitet, och likaså måste det vara omöjligt att få med de allra senaste landvinningarna. Det är därför bara naturligt, att den i »press-stopp» kapitlet X beskrivna skalmodellen kommit att få en alltför knapphändig behandling. Som författarna inledningsvis också påpekar, skulle framställningen av kärnspektroskopien ha vunnit betydligt på att grundas på denna enkla

modell i stället för på supermultiplett-teorien. På grund av ämnets natur är dessa svårigheter emellertid oundvikliga.

Bortsett från detaljer är boken väl skriven och klart och översiktligt uppställd. Framställningen är i regel brett hållen och kan därför icke alltid bli djupgående, men även i sådana fall ger boken en värdefull hjälp som förberedelse för läsandet av originalavhandlingarna. Den är huvudsakligen avsedd som orientering för experimentalfysiker arbetande inom kärnfysiken samt för studerande i fysik och teoretisk fysik. Den förutsätter i sin helhet icke större teoretisk bakgrund än som motsvaras av t. ex. Schiffs lärobok i kvantmekanik (se rec. i Elementa *32*, 130), vilken numera betraktas som minimikrav för fysikstuderande i U.S.A., och vissa delar är ännu lättare tillgängliga.

Blatts och Weisskopfs bok kan därför livligt rekommenderas den som är intresserad av en överblick av den aktuella situationen inom kärnteorien, de viktigaste experimentella erfarenheterna och deras teoretiska förklaring. *Per-Olov Löwdin*

Fred B. Seely och James O. Smith, *Advanced Mechanics of Materials*, J. Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd., London, 2. uppl. 1952, Pp. 680, $ 8.50.

Boken, som är byggd på den förste författarens kurser vid University of Illinois, förutsätter förkunskaper motsvarande de normala kurserna i hållfasthetslära vid amerikanska högskolor. Härav följer att författaren kunnat fördjupa sig på enskilda punkter utan att behöva inlåta sig på en upprepning av det sedvanliga innehållet i de elementära kursböckerna i ämnet. Text och figurer tillfredsställa högt ställda anspråk på klarhet och begriplighet. Kraven på matematiska förkunskaper äro avstämda efter amerikansk standard och torde ej bereda svenska läsare större svårigheter. I överensstämmelse med god amerikansk tradition är ett stort antal övningsexempel med lösningar inarbetade i texten. Varje kapitel åtföljes av en samling hänvisningar till originallitteraturen, visserligen i huvudsak inskränkt till den amerikanska.

Första upplagan av boken utkom 1932 och bestod då av fyra delar, som i den nya upplagan utökats med ytterligare två, varjämte även de övriga fått betydande tillskott, så att i själva verket en helt ny bok föreligger. Av delarna omfattar I: kap. 1—3, II: kap. 4—11, III: kap. 12, IV: kap. 13—16, V: kap. 17—19, VI: kap. 20—21. Innehållet är i korthet enligt kapitelrubrikerna: 1. Analys av ämnesområdet, 2. Elementära spänningsformler vid statisk last, 3. Spänning och deformation. Flyt- och brotteorier, 4. Balkars skjuvcentrum, 5. Sned böjning,

6. Krökta balkar, 7. Balk på elastiskt underlag, 8. Plattor, 9. Vridning, 10. Tjockväggiga cylindriska kärl, 11. Beröringshållfasthet, 12. Castiglianos sats, 15. Deformationsberäkning med hjälp av enhetslast eller tillsatskraft, 16. Statiskt obestämda system, 17. Inverkan av liten plastisk flytning vid strävor och raka balkar, 18. Inverkan av liten plastisk flytning vid kombinerad böjning och axialkraft, 19. Gränslastmetoden, 20. Elastisk och plastisk knäckning av strävor, 21. Buckling av cylindriska kärl under yttre övertryck.

Boken kan varmt rekommenderas den som vill orientera sig beträffande det teoretiska underlaget för konstruktörens och beräkningsingenjörens arbete inom såväl det mekaniska som kanske i synnerhet byggnadstekniska området. *Folke G. Odqvist*

H. Ewald—H. Hintenberger, *Methoden und Anwendungen der Massenspektroskopie.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse, 1953, 288 S., DM 25.00.

Alltsedan J. J. Thomson 1910 konstruerade den första masspektrografen enligt den numera välkända parabelmetoden har möjligheter till hög precision inom ett viktigt område av kärnfysiken varit för handen. Avsevärda framsteg skedde emellertid först genom Aston's epokgörande insatser i och med att dennes första masspektrometer blev färdig 1919. Välbekanta äro numera de undersökningar över grundämnenas isotopiförhållanden som Aston utförde med hjälp av spektrografer av ständigt stegrad prestationsförmåga. Under senare tid har masspektroskopien gått fram efter väsentligen två olika linjer. Det har dels gällt att söka bestämma *intensiteter* av olika masstal, dels att bestämma masstalen själva med största möjliga noggrannhet. Ett mycket stort antal olika typer av spektrometrar och spektrografer har därvid byggts och i detta arbete har viktiga insatser framför allt gjorts av Mattauch, Bainbridge, Dempster, Bleakney och Nier.

Det tidigare skedet av masspektroskopien har ingående skildrats i Aston's egen monografi »mass spectra and isotopes». I och med den föreliggande boken har nu även det senare skedet inom detta område fått en mycket fullständig och förnämlig behandling. De båda författarna äro själva sedan många år tillbaka aktiva masspektroskopister, och deras namn borgar för att läsaren befinner sig under säker ledning, då det gäller att söka tränga in i detta aktuella forskningsfält. Jonkällor, jonoptik och detektorer samt de viktigaste av de bestående apparattyperna diskuteras ingående. Vidare redogöres för mätmetodik vid intensitets- och masstalbestämningar och de felkällor som man där har att räkna med. Ett stort avsnitt av boken är ytterligare ägnat åt masspektroskopiens användningsområden, t. ex. inom geologi, kemi och kärnfysik.

Som helhet är boken klart och redigt skriven och framställningen trots sin detaljrikedom överskådlig. Boken är givetvis i första hand avsedd för den som önskar specialisera sig på området men kan utan tvivel också ha mycket att ge en läsare vars intresse är av mera allmänt fysikalisk natur. *Kai Siegbahn*

Robert A. Friedel and Milton Orchin, *Ultraviolet Spectra of Aromatic Compounds.* John Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1951, 52 sidor text+579 diagram, $ 10.00.

Behovet av spektrokemiska metoder för grundläggande och tillämpad kemisk forskning ökar ständigt. Det är emellertid svårt att med en rimlig arbetsinsats få en uppfattning om vad som med dessa metoder är utfört inom ett ämnesområde, då uppgifter härom kunna förekomma mycket spridda inom litteraturen. Detta gäller framförallt spektrokemien inom det ultravioletta våglängdsområdet.

Den bok, som här anmäles, fyller en lucka i detta avseende och är planerad att utgöra en början till en systematisk samling ultravioletta spektra av flerkärniga aromatiska substanser. Den omfattar omkring 600 spektrogram. Som exempel kan nämnas att många av de i stenkolstjära och skifferolja förekommande ämnenas spektra äro registrerade. Ett stort antal spektrogram av cancerogena substanser ingå även i samlingen. Som ett värdefullt komplement lämnas litteraturuppgifter beträffande ultravioletta spektra även för alifatiska substanser, bensolderivat, färgämnen, hormoner och steroler.

Samtliga spektrogram återge logaritmen för den molära extinktionen som funktion av våglängden. De kunna därför sinsemellan lätt jämföras, vilket ytterligare underlättas av att bladen endast äro tryckta på ena sidan och lätt kunna avlägsnas ur boken. Spektrogram lagda på varandra kunna då i detalj jämföras. Tyvärr saknas för denna jämförelse uppgifter om bandbredd, vilket emellertid ofta är fallet även i originallitteraturen.

Till den stora samlingen spektrogram är fogad en kort inledande text, som behandlar spektrometrisk nomenklatur, ljusabsorptionslagarna för lösningar, olika instrument och hur de användas för kvalitativ och kvantitativ analys. Dessutom diskuteras i korthet olika organiska substituenters spektrokemiska inflytande.

Det är att hoppas att denna första samling åtföljes av flera liknande. *Paul W. Lange*

Keith Henney—Glen A. Richardson, *Principles of Radio.* John Wiley & Sons, Inc., 6th Ed., New York 1952, Pp. vii+655, $ 5.50.

Henney gav ut Principles of Radio 1929. Han har hållit sin bok i nivå med utvecklingen genom nya editioner 1934, 1938, 1942 och 1945.

I samverkan med en yngre universitetslärare har han nu låtit boken undergå ytterligare en genomgripande bearbetning. Trots syrlig kritik i den avancerade fackpressen har bokens popularitet stått sig genom åren; totala antalet upplagor är bortåt femtio. Författaren är en tränad skribent; han har varit chefredaktör för det stora halvpopulära magasinet Electronics och är numera knuten till tidskriften Nucleonics.

Boken är avsedd för självstudier men användes i betydande omfattning som lärobok i lägre tekniska skolor inom det engelska språkområdet. Den kan betraktas som en elementär framställning av elektroniken och högfrekvenselektricitetsläran; titeln är sålunda fullt adekvat. Boken avser inte att vara handledning för konstruktörer, och tekniska detaljer meddelas därför ytterst sparsamt. Inledningsvis (ca 200 sidor) behandlas grundläggande lik- och växelströmslära med tillhörande mätteknik.

Framställningen är huvudsakligen verbal och belyses av drygt 400 figurer. Den använda matematiska apparaten går inte över allmänna kursen i III[4] R. Boken innehåller ett stort antal genomräknade exempel samt rikligt med övningsuppgifter.

Boken är bra som uppslagsbok och synnerligen lämplig som introduktion för den som vill studera radioteknik på egen hand.

Torsten Jönsson

Sergei A. Schelkunoff—Harald T. Friis, *Antennas: Theory and Practice.* Applied Mathematics Series. John Wiley & Sons, Inc., New York 1952, Pp. xxii+639, $ 10.00.

Sergei A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory.* Applied Mathematics Series. John Wiley & Sons, Inc., New York 1952, Pp. xii+216, $ 6.50.

Antennteorien, grundad av Heinrich Hertz, torde vara det område inom den klassiska elektricitetsläran som ställer de största kraven på den studerandes intellektuella utrustning och matematiska insikter. Området är svårt att överblicka; forskningsverksamheten är sedan ca 15 år ytterst intensiv, huvudsakligen på grund av radarteknikens behov. Till de främsta auktoriteterna höra Schelkunoff och Friis vid Bell Telephone Laboratories samt professor Erik Hallén vid Tekniska högskolan i Stockholm.

Den första av ovannämnda böcker är en college-lärobok i antennlära, baserad på fysikalisk argumentation och förhållandevis måttlig matematisk apparat. Framställningen är personlig som i en korrespondenskurs och pedagogiskt och stilistiskt lysande. »The contents of this book express our idea of what a college textbook on antennas should contain. — — — Anyone who has a working

knowledge of general physics and calculus is adequately prepared for this book *provided he possesses scientific courage.*» (Kurs. av rec.) Boken rekommenderas åt den som vill ha ett verksamt bryne för hjärnan.

Den andra boken, som vänder sig lika mycket till matematiker som till fysiker och radiotekniker, behandlar resultaten av den avancerade antennforskningen i rigorös form, främst undersökningarna av Schelkunoff själv, Hallén samt Stratton och Chu. *Torsten Jönsson*

Conrad Lönnqvist, *En färd till månen.* Svenska Bokförlaget, Stockholm 1952, 36 s., kr. 2:25.

Otto Willi Gail, *På spaning i världsrymden.* Till svenska av Conrad Lönnqvist. Natur och Kultur, Stockholm 1952, 100 s., häft. kr. 6:75, kart. kr. 8:50.

Att lektor Lönnqvist kan konsten att kåsera om astronomi vet varje radiolyssnare. Elementas läsare påminner sig säkerligen dessutom att han i denna tidskrift (*31*, 1948, s. 38, 145) behandlade världsrymdsraketens teori. Det är sålunda naturligt att man låtit hans »En färd till månen» inflyta i serien »Från kunskapens fält». Det är ett trevligt litet häfte, som säkerligen ej heller sviker förväntningarna hos en ungdomlig läsekrets. Efter en redogörelse för hur en raketfärd till månen kan tänkas komma att gå till, får man veta, vad den som till äventyrs helbrägda lyckats landa på vår satellit, kan få uppleva under en upptäcktsfärd på månytan. Litet escapism av detta slag kan säkert ej skada som krydda i samband med fysikundervisningen.

Den senare bokens tyska titel »Wir plaudern uns durch die Astronomie» beskriver egentligen bättre Gails berättarmetod och även bokens innehåll, än den titel som det svenska förlaget föredragit. Man får en överblick i kåserande form över vissa delar av astronomin, särskilt astrofysiken, med många målande jämförelser exempelvis vid åskådliggörandet av materians tillstånd i stjärnornas inre eller i deras atmosfärer liksom av dess nästan ofattbara utspädning i rymden mellan stjärnorna. Ett stort antal teckningar underlättar förståendet. Översättaren har gjort sig möda att här och var medelst fotnoter korrigera och modernisera texten; han har också medtagit ett par svenska fotografier. Tyvärr har han icke vid sin bearbetning även infört rubriker i texten. Innehållsförteckningen kommer därför endast att nämna de tabeller som följer efter texten. Dessa innehåller inte bara sedvanliga uppgifter om himlakropparnas ljusstyrkor, massor etc., utan även listor över exempelvis viktiga tal (astronomiska såväl som atomfysiska) och längder av olika storleksordningar. Ett gott grepp av förf. är den ordlista han ger sist i boken. Den upptar för-

klaringar av ett femtiotal i texten nämnda ord, mest vetenskapliga termer; i denna lista ingår några personnamn, nämligen Aristoteles, Doppler, Einstein, Heraklit och H. N. Russell — detta urval kunde kanske ha kompletterats. *Tord Elvius*

Carl Mahr, *Anorganisches Grundpraktikum*, Verlag Chemie 1952, 332 s., 53 bilder och 15 mikrofotos av kristaller, kart. DM 15.—.

Författaren är en man, som kan alla knep — i god bemärkelse — och inte glömmer bort att tala om ett enda. Det finns väl inte ett misstag som nybörjaren kan begå eller ett enda lämpligt förfaringssätt, som han bör tillägna sig, som inte framhålles i vad förf. kallar Vorpraktikum. Och även fortsättningen utmärker sig för en noggrannhet i beskrivningen, som brukar betecknas som pinsam. Och man undrar, om inte nybörjaren bör få göra ett eller annat misstag, varav man ju lär sig det mesta, eller själv fundera ut det lämpligaste sättet. Här ledes man verkligen vid handen. Men det skall villigt erkännas, att det finnes mycket att lära för den, som själv skall leda laborationsövningar. Dock äro försöken genomgående ganska enkla, men några kapitel avvika genom sitt innehåll från det sedvanliga, t. ex.: Organiska reagens i den kvalitativa analysen, Halvmikroteknik med avbildningar av de viktigaste redskapen, Specialreaktioner på katjoner och anjoner. — Ett antal katjoner identifieras mikroskopiskt under hänvisning till goda mikrofotografier. Tabeller över reagens och deras beredning, jämviktskonstanter, indikatorer, löslighetsprodukter, atomvikter avsluta boken. *G. Starck*

Bernard Pullman et Mme Alberte Pullman, *Les théories électroniques de la chimie organique*. Masson et Cie, Paris 1952, 665 p., 2800 fr.

Forskarparet Bernard och Alberte Pullman, båda verksamma vid Radiuminstitutet i Paris, har i denna bok åstadkommit en värdefull sammanfattning av de resultat den moderna teoretiska organiska kemien tillförts genom kvantmekaniken. Åtskilliga mer eller mindre vederhäftiga framställningar av hur man bör tänka sig elektronernas uppträdande i organiska molekyler ha publicerats. Författarna Pullman ha trots sin relativa ungdom redan en ansenlig produktion av originalarbeten inom kvantkemien bakom sig och äro sålunda vana att behandla problemen med de mest exakta metoder man för närvarande känner.

Boken är ganska brett upplagd och börjar med kvantmekanikens grundbegrepp, bygger härpå atomstruktur och grunderna för den kemiska bindningen, allt på ett hundratal sidor. Det är givet att en

så koncentrerad framställning endast är njutbar för den som tidigare har någon kunskap inom området. Inledningen torde emellertid vara nödvändig för hänvisningar i det följande. Ett allmänt studium av molekyler med konjugerade dubbelbindningar, resonansenergiens betydelse för de kemiska egenskaperna, elektronfördelning och dipolmoment m. m. behandlas på drygt 300 sidor, och resten av boken ägnas åt mer speciella områden såsom elektronspektra, diamagnetism och reaktionsbenägenhet. Det är givet att de kvantmekaniska metodernas praktiska begränsningar måste sätta sin prägel på ett arbete som detta, och man får inte alltid svar på de mest angelägna frågorna. Sålunda behandlas t. ex. endast omättade föreningars reaktionssätt i det sistnämnda kapitlet. Begränsningarna bero på att kvantkemien för närvarande är tämligen outvecklad, och det sagda är ingalunda avsett att förringa författarnas förtjänstfulla arbete.

En kritisk anmärkning måste dock göras. Liksom i fransk litteratur i allmänhet är precisionen t. ex. då det gäller stavning av personnamn otillräcklig. Den heder som bevisas Arrhenius genom att hans namn har fästs vid reaktionshastighetsformeln vore större om båda »r» hade kommit med. Både texten och sakregistret innehålla detta synbarligen systematiska fel. *Lars Melander*

Gustaf Lindhe, *100 försök. Handledning i experiment i fysik och kemi för folkskolan.* Hugo Geber, Stockholm 1952, 127 s., häft. kr. 6: 50, inb. kr. 8: 50.

En systematiskt sammanställd handledning för undervisningen i fysik och kemi på folkskolestadiet har hittills saknats, varför föreliggande bok är synnerligen välkommen. Den behandlar de grundläggande experimenten på detta stadium med undantag av kroppars jämvikt och rörelse. Varje försök är åskådliggjort med en eller flera figurer; beskrivningen är koncis men samtidigt utförlig och ger många värdefulla praktiska anvisningar. I s. k. sammanfattningar ges en kort översikt av de naturlagar, som försöken skola åskådliggöra. Utom de gamla välkända standardförsöken ger författaren även en del nya tips till experimentanordningar. Ett trevligt exempel härpå är författarens förslag till strålningstermometer, som lätt kan förfärdigas av en glastratt och locket till en skokrämsburk; som värmestrålningskälla föreslås sedan ett nätanslutet strykjärn, som delvis sotas. Sådana nya tips äro alltid välkomna, under det att en del gammalt gods som t. ex. elektroforen gott kan avvisas till undervisningens antikvitetskammare.

Även för en lärare i realskolan, framförallt för en ny, kan det vara intressant att se de grundläggande försöken sammanställda som i före-

liggande bok. Boken är emellertid i första rummet avsedd för blivande folkskollärare, för vilka den borde vara en obligatorisk kursbok.

Edvin Ferner

GUNNAR HÄGG, *Kemisk reaktionslära*, 5:e uppl. Almqvist & Wiksells Akademiska handböcker 1952, 199 s., inb. kr. 12: 50.

Jämförd med föregående upplaga företer den nu utgivna betydande ändringar, föranledda av de erfarenheter, som gjorts vid arbetets användning som handledning vid undervisningen. Ett par kapitel äro helt nyskrivna, många andra omarbetade, varvid framställningen dels förenklats dels på några punkter utvidgats. Bland nyheterna märkas ett avsnitt om jonbytare och det synnerligen intressanta om amfotera metallhydroxider och flerkärniga komplexer.

Det är i vårt land inte alltför vanligt, att framstående forskare så intressera sig för undervisningen, att de finna lust och tid till handledningars eller läroböckers författande. Professor Hägg är en av de få, och hans klara, mönstergilla och uttömmande exposé av ett grundläggande område kan inte nog varmt anbefallas som lektyr för varje kemilärare, som försöker att i någon mån bringa sin egen elementära undervisning i samklang med modern kemi. *G. Starck*

Atomic Energy. Edited by J. L. Crammer and R. E. Peierls, Penguin Books 1950, 200 s., kr. 1: 50.

Boken utgör en reviderad och utvidgad upplaga av en snabbt slutsåld publikation i serien Science News, kompletterad med nya bidrag. Kapitlen äro: Frigörande av atomenergi, Atomer och kärnor, Framställning av atombränsle genom isotopseparering, Kärnreaktioner, Atomkraftens råmaterial, Atombombens fysik, Användning av radioaktiva isotoper i biologi och industri, Hälsorisker, Kärnfysikens verktyg. Framställningen förtydligas av 21 fotografier, 24 illustrationer och 12 porträtt samt är tillräckligt elementär att kunna med behållning studeras även utan speciella förkunskaper. Nio vetenskapliga författare dela äran av de intresseväckande utredningarna.

E. Nordefeldt

Dagobert spränger atomen. AB. P. A. Norstedt och Söner, Skolboksavdelningen, 1952, 32 s., kr. 3: 40.

Enligt förordet av Wilhelm Tham utgör häftet översättning av en amerikansk bildserie i atomlära och vill med hjälp av även hos oss välkända seriefigurer ge en konkret och lättfattlig inblick i atomernas värld, innefattande bl. a. isotoper, stabila och sönderfallande atomer,

atomenergi i solen samt atomsprängning. De 24 bilderna i flerfärgstryck som uppta hälften av varje sida innehålla intressanta situationer och lustig text, som på sidornas återstående del mer sakligt kompletteras. Det hela avslutas med en redogörelse för radioaktiva isotopers användning inom medicin, åkerbruk och industri samt en serie ja-nej-frågor och ett blad för anteckningar.

En originell och hittills hos oss oprövad form för orientering i ett av naturvetenskapens mest aktuella områden, för tonåringar — kanske också för äldre personer — fyndig och full av spänning.

E. Nordefeldt

Jeanne Bendick, *Elektronen människans tjänare.* Hugo Gebers förlag 1952, 152 s., kr. 6:85.

Författarinnan vill ge vetgirig och tekniskt intresserad ungdom en populär framställning av elektronernas användning i elektronrör av olika slag, elektroniken i vardagsliv och industri, hur den vårdar vår hälsa, hjälper vetenskapen, ger underhållning i radio, film och television. Framställningen, som även behandlar radar och atombomb, belyses av 110 tecknade bilder, delvis av lustig art, som läsaren säkerligen med intresse beskådar.

Även om en del av bokens innehåll förblir svårföreståeligt på grund av ämnets tekniska natur och den ställvis alltför starka koncentrationen, synes den bl. a. kunna lämpa sig som premiebok på läroverkens mellanstadium.

E. Nordefeldt

Industriens Upplysningstjänst

grundad 1942 av Sveriges Industriförbund och Sveriges Arbetsgivareförening, har till uppgift att sprida opolitisk upplysning om svenskt industriellt näringsliv. Chef för upplysningstjänsten är rektor Erik Eklund. Ett led i arbetet är utgivandet av en skriftserie, vars red. är fil. lic. G. Walldén. Serien innehåller mycket av intresse för kemi- och fysiklärare. Enligt anmälarens mening är det av synnerligen stor vikt, att läraren i fysik och kemi får en allsidigare orientering i industriens problem än som strängt taget hör till hans fack. Ur denna synpunkt har de välskrivna och intressanta skrifterna en viktig uppgift att fylla.

I serien har hittills utkommit 18 skrifter behandlande svensk skoindustri, slakteriindustri, porslins-, keramik- och glasindustri, sten-, skogs- och träindustri, grafisk industri, malm- och skogstillgångar, energiförsörjning m. m.

Närmare upplysningar om skriftserien lämnar den folder som medföljer som bilaga till detta häfte av Elementa. Vid rekvisition av

skrifterna från Industriens Upplysningstjänst, Drottninggatan 40, Stockholm (postgiro 19 42 72) erhålles 35 % rabatt; hela serien erhålles för 20 kr. *Bror Gustaver*

Alan M. Bateman, *The Formation of Mineral Deposits.* John Wiley & Sons, Inc., New York 1951, Pp. 371, $ 5.50.

Författaren, som är en känd amerikansk expert på mineralfyndigheter och professor vid Yale University, har gjort sig mödan att skriva denna halvpopulära framställning för läsare utan grundläggande mineralogiska och geologiska kunskaper. Boken handlar om mineralbildning i naturen, om prospektering och utvinning av mineralfyndigheter och om mineraltillgångar i olika länder. Varje kapitel avslutas med en kort litteraturförteckning. I en kort »glossary» på 9 sidor förklaras de i boken använda specialtermerna.

Boken är välskriven och rikligt illustrerad. *Otto Mellis*

Recensenter i detta häfte: fil. lic. G. Blom, Malmö; docent T. Elvius, Saltsjöbaden; lektor E. Ferner, Karlstad; lektor B. Gustaver, Stockholm; lektor S. Hilding, Stockholm; lektor P. Häggmark, Kalmar; lektor T. Jönsson, Stockholm; fil. lic. P. Lange, Stockholm; docent P.-O. Löwdin, Uppsala; docent L. Melander, Stockholm; docent O. Mellis, Stockholm; lektor E. Nordefeldt, Stockholm; professor F. G. Odqvist, Stockholm; professor Kai Siegbahn, Stockholm; lektor G. Starck, Stockholm; fil. lic. M. Tideman, Uppsala.

Gradualavhandlingar[1]

Ove Hemer, *On the Diophantine equation* $y^2-k=x^3$. Uppsala 1952, 101 s. Disp. i Uppsala den 25 oktober 1952. Opponenter: professor Thoralf Skolem, Oslo, och fil. lic. Lars Fjellstedt, Uppsala.

Problemet att finna alla heltalslösningar till en viss ekvation $y^2-k=x^3$ är ekvivalent med att bestämma alla heltalslösningar till ett ändligt antal binära kubiska former $(a, b, c, d)=1$. Enligt Thues sats är antalet lösningar till en sådan form ändligt. I föreliggande avhandling behandlas huvudsakligen $k>0$, i vilket fall de motsvarande irreducibla formerna få negativ diskriminant och svara mot kubiska ringar $R(1, \alpha, \beta)$ med en enda fundamentalenhet. Det är främst Nagells

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

och Delaunays arbeten om sådana former, som ha skapat förutsättningarna för fortsatta resultat.

Vi skriva ekvationen $y^2-kf^2=x^3$, k kvadratfritt. I kap. I behandlas först bestämningen av de former, som ersätta ekvationen, dels i det enklare fallet $k=1$, dels för $k\neq 1$. I det senare fallet bestämmes antalet kubiska talkroppar, som de mot de irreducibla formerna svarande ringarna fördela sig på, av antalet primfaktorer i $2f$, som uppdelas i två olika ideal i den kvadratiska talkroppen $K(\sqrt{k})$, samt av bastalet e för 3 i gruppen av idealklasser i $K(\sqrt{k})$. Saknar $2f$ sådana faktorer, blir antalet talkroppar högst $\frac{1}{2}(3^{e+1}-1)$ och, om $k<0$, $\neq -3$, alltid mindre. Övre gränser för antalet lösningar till ekv. $y^2-kf^2=x^3$ ha under vissa förutsättningar angivits.

Efter diskussion av lösbarheten av $(a, b, c, d)=1$ behandlas i fortsättningen lösbara former $F(u, v)=(1, p, q, r)=1$ som normer av enheter $\varepsilon^n=u+v\theta$, där $F(\theta, -1)=0$ och $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ är fundamentalenheten i ringen $R(1, \theta, \theta^2)$. Med hjälp av ett enkelt kriterium kan $n<0$ lätt undersökas och $n>0$ därefter förutsättas. Olika behandlingsmöjligheter, huvudsakligen av p-adisk natur ha angivits. I kap. II undersökas alla hittills olösta ekvationer med $0<kf^2\leqq 100$ samt några fall med $k<0$. Fullständiga lösningar anges i de flesta av dessa fall (i några fall är resonemanget tyvärr icke bindande).

I kap. III utnyttjas sambandet mellan funktionerna $y^2-k=x^3$ och $Y^2+27k=X^3$, betraktade som kurvor av släktet 1 och uttryckta med hjälp av elliptiska funktioner. Flertalet ekv. $y^2+27k=x^3$ med $-50\leqq k\leqq 50$ ha lösts fullständigt. Slutligen har en tabell uppgjorts över de fundamentala ringar och enheter som definiera de i fallen $0<kf^2\leqq 100$ erhållna talkropparna.

Per Häggmark, *On a class of quintic Diophantine equations in two unknowns*, Uppsala 1952, 91 s. Disp. i Uppsala den 24 okt. 1952. Opponenter: prof. Th. Skolem, doc. G. Borg (extra ordinem) och fil. lic. L. Fjellstedt.

Enligt allmänna satser av Thue och Siegel finnes det på kurvor av en grad $\geqq 3$ och ett släkte $\geqq 1$ endast ett ändligt antal gitterpunkter. Mera precisa resultat har bl. a. erhållits för vissa kurvor av formen $Ax^n-By^n=C$, $n\geqq 3$. Så t. ex. har Nagell studerat fallet $n=3$ och Ljunggren, med en metod analog till den av Nagell använda, fallen $n=4$ och $n=6$. Nagells bevismetod grundar sig på teorien för enheter i kubiska talkroppar och vidare huvudsakligen på delbarhetsresonemang. I Nagells och Ljunggrens arbeten utgjorde det förhållandet ett viktigt faktum, att det i de talkroppar, där operationerna utfördes, antingen var så att talkroppen var primitiv och endast hade en funda-

mentalenhet eller också imprimitiv men hade en undertalkropp med endast en fundamentalenhet. I mitten av 1930-talet utvecklade Skolem i en rad avhandlingar en metod, den s. k. *p*-adiska metoden, med vars hjälp det är möjligt att angripa diofantiska ekvationer av den nämnda typen även i sådana fall då operationerna måste utföras i t. ex. en primitiv talkropp med mer än en fundamentalenhet.

Föreliggande avhandling är det första genomförda försöket att använda denna metod på en klass av femtegradskurvor. Enligt en sats av Siegel har den i avhandlingen behandlade ekvationen, $x^5+My^5=1$, högst en icketrivial heltalslösning då $M \geqq 2060$, ett resultat som för övrigt, såsom extraopponenten visade, kan skärpas. Siegels bevis grundar sig på teorien för hypergeometriska funktioner. Den p-adiska metoden däremot tillhör helt talteorien och är av mera allmän karaktär. Den kan betraktas som en generalisation av Nagells ovan nämnda metod. I första hand är den en metod för behandling av vissa exponentialekvationer. Dess användbarhet på diofantiska ekvationer av ickeexponentiell typ beror på att stora klasser av sådana ekvationer i kraft av enhetsteorien är ekvivalenta med vissa exponentialekvationer.

Ett huvudresultat är att den diofantiska ekvationen $x^5+My^5=1$ har högst två icketriviala heltalslösningar. Det framgår emellertid av undersökningen, att man med samma metod kan uppnå ett stort antal andra resultat beträffande enheter i femtegradstalkroppar med två fundamentalenheter.

Bengt G. Rånby, *Fine Structure and Reactions of Native Cellulose*, Stockholm 1952. Disp. i Uppsala den 19 april 1952. Opponenter: docent Ingvar Jullander, Örnsköldsvik, och laborator Paul W. Lange, Stockholm.

Avhandlingen utgör en sammanfattning av sju uppsatser publicerade i Acta Chemica Scandinavica, Arkiv för Kemi, Faraday Society Discussions och Svensk Papperstidning. Arbetet ingår som ett led i de cellulosaundersökningar, som pågått i ca 10 år vid Fysikalisk-Kemiska Institutionen, Uppsala Universitet, under ledning av professor The Svedberg.

Som undersökningsmaterial har valts cellulosa av det mest skilda biologiska ursprung: från trä, bomull, bakteriemembraner (*Acetobacter*) och manteldjur (*Ascidiae*). De olika cellulosaproven ha renframställts, mekaniskt sönderdelats i vattensuspension genom bestrålning med ultraljud och undersökts i elektronmikroskop. Efter lämplig metallbeskuggning av preparaten (beläggning med ett ytterst tunt skikt genom förångning av metallen under högvacuum) har en upplösning på ca 30 Å uppnåtts vid avbildningen.

Vid undersökning i elektronmikroskop ha samtliga dessa cellulosatyper visat sig vara fibrillära och alltigenom uppbyggda av submikroskopiska strängar, micellsträngar, av obestämd längd och ca 100 Å bredd. Enligt mätningarna ökar strängarnas medelbredd från 75—80 Å till 110—120 Å i ordningen trä-, bomulls-, bakterie- och djurcellulosa, men skillnaderna äro små i förhållande till upplösningen. En micellsträng är en mycket liten strukturenhet. En sträng med 100 Å bredd och cirkulärt tvärsnitt kan beräknas innehålla 240 cellulosakedjor, medan en vanlig trä- eller bomullsfiber med bredden ca 0,05 mm innehåller flera miljoner micellsträngar. En särskild undersökning av delignifierade träfibrer har visat, att hemicellulosan (=kolhydrater andra än cellulosa) inte själv bildar strängar utan sannolikt ligger adsorberad på cellulosasträngarnas ytor i fibrerna.

Micellsträngarna visa karakteristiska reaktioner vid svällning med lut och hydrolys med utspädd mineralsyra. Strängarna, som till större delen äro kristallina, reagera först vid en viss bestämd lutkoncentration (för träcellulosa vid 5 %, bomulls- och bakteriecellulosa 7 % och djurcellulosa vid 9 % NaOH vid 0° C), och svällningsreaktionen är fullständig inom ett NaOH-intervall på 1,5—3 %. Vid uttvättning av luten med vatten av rumstemperatur övergår cellulosan i en ny form, merceriserad cellulosa. Denna fasövergång har följts med röntgen- och elektrondiffraktion och genom mätning av cellulosans vattenadsorbtion. Reaktionens förlopp har också diskuterats termodynamiskt.

Hydrolys med kokande 2,5-N svavelsyra sönderlägger micellsträngarna i kortare fragment, miceller, av samma bredd som strängarna. Trä- och bomullscellulosa ge de kortaste och djurcellulosa de längsta micellerna. Genom peptisering i destillerat vatten ha kolloidala lösningar av miceller framställts och studerats. — Cellulosasträngarnas resistens mot svällning med lut och hydrolys med syra ökar alltså i ordningen trä-, bomulls-, bakterie- och djurcellulosa. Röntgendiagram av dessa cellulosaprover visa skarpare och bättre definierade reflexer i samma ordning.

En jämförande elektronmikroskopisk undersökning av cellulosan hos ett par encelliga alger har visat, att *Valonia*- (med nativ cellulosa) och *Halicystis*-cellväggar (med merceriserad cellulosa) ha helt olika uppbyggnad.

De erhållna resultaten ha diskuterats i samband med några tekniskt viktiga frågor, såsom skillnaden mellan trä- och bomullscellulosa, innebörden av bestämningen av alfa-, beta- och gammacellulosa för trämassor, och cellulosafibrernas malning i vattensuspension vid pappersframställning.

Tidskrifter

Populär astronomisk tidskrift, Stockholm 1952: 3—4.

Ur innehållet: Solobservatoriet på Capri; Radioastronomiska forskningar i Holland; Astronomiska studier i Sydafrika; Kupolbyggnader och observationspaviljonger; Walter Gyllenberg, In Memoriam. Notiser.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1952: 4.

Ur innehållet: De store planeter i 1953; Stjernernes udvikling; Tycho Brahes instrumenter; Fra komissionsmøder under sidste UAI-kongress; Notiser.

Ljuskultur, Stockholm 1952: 3—4.

Ur innehållet: Om belysning av skidbackar; Nyare fluorescensmetoder inom ljusreklamen; En färgatlas; Ellampor för fotografi; Människan och ljuset, återblick och framtidsvisioner; Manöverutrustningar för scenbelysning; Resultattavlan på Helsingfors Stadion.

Populär radio, Stockholm 1952: 10—12, 1953: 1—2.

Ur innehållet: Kamerarör för television; Germaniumdiodens användningsområden; Radioastronomisk forskning vid Chalmers; Nya mätinstrument; Televisionsmottagaren — hur den beräknas och konstrueras (XII—XIII); Ståendevågmätning vid mikrovågfrekvenser; Upptagning och återgivning av stereoljud; Recensioner av radiolitteratur.

Fysisk Tidsskrift, København 1952: 5—6.

Ur innehållet: Nyere undersøgelser over kavitation; Præcisionssammanligning af normaler for elektrisk modstand; Nogle vektorformler og eksempler på deres anvendelse; »Mekanismen i Vesuv».

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1952: Desember.

Ur innehållet: H. A. Kramers, In memoriam; Positroniumatomets oppdagelse; Anvendelser av mikrobølger i fysisk forskning; Uran-reaktoren, atomenergien og bombene (forts.); Motstand og ledningsevne.

Science Progress, London 1953: January.

Ur innehållet: The Ice Age and the Future of Man; High Frequency Discharges in Gases; The Anatomical Approach to the Classification of the Flowering Plants; Watching the Sky; Magnetostriction. Recent Advances in Science: Astronomy, Metereology, Organic Chemistry, Geology, Botany, Zoology. Ett stort antal bokanmälningar.

Discovery, London 1952: December; 1953: January, February.

Ur innehållet: A History of Puddingstone; The Jet Stream; The Invention of the Experimental Method; Chromatography wins a Nobel Prize; Underground Gasification; The Windening Orbit of Powder Metallurgy; The 17th-Century Revolution in Mathematical Physics; Research in Fatigue; The Military College of Science; Chromatography Past and Present; Metane in the Service of Man. Ett stort antal notiser under rubriken »Progress of Science».

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1848) *Triangeln ABC är inskriven i cirkeln O, vars tangenter i B och C råkas i D. Sök sambandet mellan triangelns sidor, då punkterna A och D ligga lika långt från linjen BC. Vilka värden kan vinkeln A antaga?* *X.*

1849) *Symmedianerna i triangeln ABC skära sidorna BC, CA, AB i* A_1, B_1, C_1. *Att konstruera triangeln ABC så, att cirkeln* $A_1B_1C_1$ *tangerar sidan BC. (Symmedianen är orten för punkter, vilkas avstånd till två triangelsidor äro proportionella mot resp. sidor.)* *X.*

1850) *Bestäm en jämn femsiffrig heltalskvadrat, som är lika med dubbla produkten av de två tal, som bildas av kvadratens två första och tre sista siffror med bibehållen ordningsföljd.* *V. Thébault.*

Enklare matematiska uppgifter[2]

1851) En kvadrat inskrives i en cirkelsektor, så att två hörn falla på bågen, som härigenom delas i förhållandet 1 : 2 : 1. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel.

Svar: 60°.

1852) Från en triangels hörn dragas linjer, som i samma led dela var och en av motstående sidor i förhållandet $m : n$. Dessa linjer begränsa en triangel. Bestäm förhållandet mellan dess yta och hela triangelns yta.

Svar: $(m-n)^2 : (m^2+mn+n^2)$.

1853) En likbent triangel roterar ena gången kring basen, andra gången kring en av de lika sidorna. Totala ytorna av de därvid uppkomna rotationskropparna, tagna i nämnd ordning, förhålla sig som 9 : 5. Hur förhålla sig kropparnas volymer till varandra?

Svar: 3 : 2.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 1851 är insänd av *A. L.*; 1852—1853 av *B. Svenonius*; 1854 och 1857 av *A.-S. Löfquist;* 1855—1856 av *S. B.;* 1858—1860 av *X.*

1854) I en regelbunden tresidig pyramid inskrives en annan dylik med spetsen i tyngdpunkten till den förstnämndas basyta och övriga hörn på de från spetsen utgående höjderna i sidoytorna. Den inskrivna pyramidens baskant, höjd samt den givnas baskant och höjd bilda i nämnd ordning en geometrisk serie. Bestäm kvoten.

Svar: $\sqrt{3}$.

1855) I en regelbunden tresidig pyramid är H höjdernas skärningspunkt, I och O de in- och omskrivna klotens medelpunkter. Bestäm vinkeln mellan basytan och sidoytorna, om I ligger mellan O och H samt $HI : IO = 2 : 5$.

Svar: $75{,}52°$.

1856) Från en fix punkt på en hyperbels asymptot drages en rörlig rät linje, som skär hyperbeln i A och B. Visa, att orten för mittpunkten av AB är en rät linje.

1857) Genom en punkt A på parabeln $y^2 = 4ax$ drages en tangent och parallellt med denna en linje l_1 genom fokus. En linje l_2 går genom A och punkten $(-a;\ 0)$. Sök orten för skärningspunkten mellan l_1 och l_2, då l_1 vrider sig kring brännpunkten.

Svar: $(x+a)^2 - y^2 = 4a^2$.

1858) Vilken excentricitet har kurvan $x^2 + By^2 + 1 = 0$, om $2x + y = 3$ är en av dess normaler?

Svar: $\sqrt{3}$ eller $\sqrt{15} : \sqrt{13}$.

1859) Genom en punkt P dragas linjer parallella med $17x - 9y + C_1 = 0$ och $19x - 3y + C_2 = 0$, tills de skära $49x + 7y + C_3 = 0$ i A resp. B. Beräkna $PA : PB$.

Svar: $1 : 2$.

1860) En linje l genom ena skärningspunkten A mellan cirklarna $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ och $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ skär cirklarna ytterligare i P och Q. Sök ekvationen för den cirkel mittpunkten av PQ genomlöper, då l vrider sig kring A.

Svar: $x^2 + y^2 + x - 4 = 0$.

Lösningar till uppg. 1821—1823

1821) *Visa, att kurvan* $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ *har ett centrum, om två av dess dubbeltangenter äro parallella.* *X.*

Den linje, som går mitt emellan de parallella dubbeltangenterna, tages till x-axel. Origo antas vara tyngdpunkt till kurvans skärningspunkter med x-axeln. Vid lämpligt val av enheter på axlarna kan

man utgå från ekvationen $y=x^5+px^3+qx^2+rx+s$ och söka visa, att $q=s=0$, om det finnes två sådana dubbeltangenter. Det sista innebär, att $(x^2+ax+b)^2(x-2a)\equiv x^5+px^3+qx^2+rx+s-l$ och $(x^2+Ax+B)^2(x-2A)\equiv x^5+px^3+qx^2+rx+s-l$, utan att $a=A$ och $b=B$ på samma gång. Identifiering ger $2b-3a^2=2B-3A^2=p$ (1), $b^2-4a^2b=B^2-4A^2B=r$ (2), $a(a^2+b)=A(A^2+B)=-\frac{1}{2}q$ (3), $-ab^2-AB^2=s$ (4). Ur (1) och (2) fås, om a elimineras: I. $b=B$, $a=-A\neq 0$, varpå (3) och (4) leda till $q=s=0$ och kurvan har centrum i (0; 0) i detta fall. Dess ekv. blir $y=x^5-5a^2x^3+5a^4x$; II. $b=(3B-12A^2):5$, $a^2=-(9A^2+4B):15$, som efter insättning i (3) ger $(B+6A^2)^3=0$, dvs. $B=-6A^2$. Därav fås $b=B$, $a^2=A^2$ och enl. (3) $-5aA^2=-5A^3$, vilket är oförenligt med $a=-A\neq 0$. Man finner, att $(x^2+Ax-6A^2)^2(x-2A)\equiv(x-2A)^3(x+3A)^2$, dvs. x-axeln är inflexionstangent i $(2A;\ 0)$ och vanlig tangent i $(-3A;\ 0)$, då $A\neq 0$, och för $A=0$ har den 5-punktsberöring med kurvan i origo. *X.*

Följande lösning av *N. J.* tillåter en elegant generalisering av satsen. Efter lämpligt val av axlar och enheter kan man förutsätta, att de parallella dubbeltangenterna ligga symmetriskt i förhållande till x-axeln samt att de skära kurvan i (1; 1) och (−1; −1). Vi anta, att $y'=5a(x-x_1)\dots(x-x_4)$. Då är vid lämplig indicering $y-1=a(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-1)$ och $y+1=a(x-x_3)^2(x-x_4)^2(x+1)$. Multiplikation ledvis ger $25(y^2-1)=(x^2-1)(\frac{dy}{dx})^2$, som för $-1\leqq x\leqq 1$ (vid iakttagande av gränsvillkoren) har lösningen $y=\sin(5\arcsin x)=16x^5-20x^3+5x$, en udda funktion, varför origo är centrum. För $x^2>1$ får man för övrigt fortsättningen $y=0{,}5(x+\sqrt{x^2-1})^5+0{,}5(x-\sqrt{x^2-1})^5$. Kontaktpunkterna höra till de mellan −1 och +1 liggande $x_r=\sin[\pm\frac{1}{10}(2r+1)\pi]$, $r=0, 1, 2\dots$. *På samma sätt visas, att en parabel av graden $2n+1$, till vilken det finnes två parallella tangenter, som tangera i n punkter vardera, är affin med $y=\sin[(2n+1)\arcsin x]$ för $-1\leqq x\leqq 1$ och $y=0{,}5(x+\sqrt{x^2-1})^{2n+1}+0{,}5(x-\sqrt{x^2-1})^{2n+1}$ för $x^2>1$.*

1822) *Hörnen A, B och C i en given triangel tagas till centra i tre cirklar, vilkas radier äro proportionella mot resp. höjder h_a, h_b och h_c. Sök orten för cirklarnas radikalcentrum.* *X.*

Som koordinater för en punkt P kan man använda punktens avstånd (med tecken) r, s, t till linjerna BC, CA, AB. Dessa s. k. normalkoordinater äro lineära uttryck i P:s Cartesiska koordinater och kunna normeras så, att de äro positiva för punkter inom triangeln. I så fall gäller alltid $ar+bs+ct=2T$ (1).

Om projektionerna av P på AB och AC äro M och N, beräknas MN

enl. cosinusteoremet och $AP=MN:\sin A$ enl. formeln $2R=a:\sin A$. Radien r i cirkeln A betecknas med $\sqrt{k}:\sin A$. Då kvadraten på tangenten från P till cirkeln A är AP^2-r^2, erhålles systemet

$$\frac{s^2+t^2+2st\cos A-k}{\sin^2 A}=\frac{r^2+t^2+2rt\cos B-k}{\sin^2 B}=\frac{r^2+s^2+2rs\cos C-k}{\sin^2 C}$$

Elimineras k, erhålles

$$\frac{s^2-r^2+2st\cos A-2rt\cos B}{\sin^2 A-\sin^2 B}=\frac{t^2-r^2+2st\cos A-2rs\cos C}{\sin^2 A-\sin^2 C}$$

eller $\Sigma(2st\cos A-r^2)(\sin^2 B-\sin^2 C)=\Sigma(2st\cos A-r^2)\sin A\sin(B-C)=0$ (2). Emellertid kan vänstra ledet i (2) upplösas i $-\Sigma r\sin(B-C)\cdot\Sigma r\sin A$, så att den sökta orten är räta linjen $r\sin(B-C)+s\sin(C-A)+t\sin(A-B)=0$, som även kan skrivas

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ \sin A & \sin B & \sin C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}=0$$

Linjen går genom den omskrivna cirkelns medelpunkt O ($r:s:t=\cos A:\cos B:\cos C$) och symmedianernas skärningspunkt (Lemoines punkt), där $r:s:t=\sin A:\sin B:\sin C$. Den andra faktorn $\Sigma r\sin A$ försvinner icke i någon egentlig punkt (1). Satt=0 ger den ∞-linjens ekv.[1] *X.*

1823) *Konstruera de spetsiga vinklar, som satisfiera ekvationen* $\sin x+\cos x=n\sin x\cos x$. *Angiv möjlighetsvillkoret.* *S. B.*

Om BC är hypotenusan i en rätvinklig triangel ABC och höjden mot BC är 1 samt en spetsig vinkel x, bli kateterna $1:\sin x$ och $1:\cos x$. Om $AB+AC=n$, är $1:\sin x+1:\cos x=n$ eller $\sin x+\cos x=n\sin x\cos x$. Utdrag BA över A stycket $AD=AC$. Om E är projektionen av D på BC, blir $AE=\sqrt{2}$. Det gäller alltså att upprita en rätvinklig triangel BDE, då hypotenusan $BD(=n)$ och den räta vinkelns bissektris $EA(=\sqrt{2})$ äro kända. Om EA råkar den kring triangeln BDE omskrivna cirkeln i F och $AF=y$, fås av de likformiga trianglarna DAF och EDF $y(y+\sqrt{2})=n^2:2$, där y konstrueras med t. ex. hjälpcirkelmetoden. Villkor: $\frac{1}{2}n\geqq\sqrt{2}$ dvs. $n\geqq\sqrt{8}$. *S. B.*

Löst av *X*, som generaliserat uppgiften.

Uppg. 1822 och 1823 äro lösta även av *I. Gunsjö.*

[1] Uppgiften är ett specialfall av en allmän sats av V. Thébault (Mathesis 1932, suppl.).

Fyllnadsprövning efter studentexamen

Januari 1953

Matematiska uppgifter för latinlinjen[1]

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x(x-y)=4(x+6) \\ y(x+y)=6(x+6) \end{cases}$
2. I en konvergent oändlig geometrisk serie är tredje termen 1 och summan lika med inverterade värdet av sjunde termen. Beräkna första termen och kvoten.
3. Ytan av kvadraten $ABCD$ är 72 cm². På sidan AD är en punkt E så belägen, att $AE:ED=2:1$. Beräkna radien i den cirkel, som går genom punkterna E och C samt mittpunkten på sidan AB.
4. I en rätvinklig triangel är ena kateten 14 cm. En cirkel med medelpunkten på denna katet går genom den räta vinkelns spets och delar hypotenusan i tre lika stora delar. Beräkna cirkelns radie.
5. I en rätvinklig triangel ABC delas hypotenusan AB i tre lika stora delar genom punkterna D och E. Beräkna summan av kvadraterna på CD och CE, och visa, att den är fem gånger så stor som kvadraten på DE.
6. Upprita kurvan $3y=12+4x-x^2$ i dessa huvuddrag. Punkten P är belägen på en del av kurvan, som ligger i första kvadranten. En rektangel har två av sina sidor utefter koordinataxlarna och ett hörn i P. Uttryck rektangelns omkrets som funktion av x-koordinaten för punkten P, och upprita ett särskilt diagram, som visar, hur omkretsen varierar, när P genomlöper nämnda del av kurvan. Ange också med hjälp av diagrammet eller på annat sätt det största värde, som omkretsen kan anta.
7. Sidorna i en triangel förhålla sig som $8:11:17$. Beräkna den spetsiga vinkeln mellan bisektrisen till den minsta vinkeln och medianen till den största sidan.

[1] *Allmänna anvisningar för alla examensprov:* Införda beteckningar böra förklaras och uppställda ekvationer motiveras. Resonemang, lösningar av ekvationer och genomförande av uträkningar böra icke vara så knapphändiga, att de bli svåra att följa. Geometriska uppgifter böra åtföljas av figurer, ritade med blyerts med hjälp av passare och linjal. — För provet i *fysik* tillkommer att enheterna angivas och att konstanter, som ej äro uppgivna i texten, hämtas ur formelsamlingen.

8. En höjd i en triangel delar en av triangelns bisektriser mitt itu och delas själv av denna i förhållandet 1 : 3. Visa, att triangeln är likbent, och beräkna det exakta värdet av förhållandet mellan en av de lika sidorna och den tredje sidan.

Resultat: **1.** x-rötter: 12, −4, 3, −2 och y-rötter resp.: 6, −2, −9, 6. **2** $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ och $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **3.** 5 cm. — Den direkta vägen är att använda formeln $R=abc:4T$. En annan är följ. Om mittpunkten till AB är M, så är halva omkretsen av triangeln AEM $6\sqrt{2}$ cm, vilket innebär, att den vid hypotenusan EM vidskrivna cirkeln, som tangerar EM i T, har centrum i C. Då CM och CE äro bisektriser till vinklarna BCT, resp. DCT, blir $\sphericalangle ECM=45°$, varav $R=EM:2\sin 45°$. **4.** 5 cm. **6.** Omkretsen $\frac{1}{6}\cdot[97-(2x-7)^2]$ med maximum $16\frac{1}{6}$ l. e. Gränsminima 12 och 8 l. e. för resp. $x=6$ och $x=0$. **7.** 56,97°. **8.** $\sqrt{3}:2$. — Låt höjden BB_1 och bisektrisen AA_1 skära varandra i P och drag $A_1B_2 \perp AC$. Om man då sätter $BP=3$, $PB_1=1$ och $AB_1=x$, så är $AB=3x$ (varav $x=\sqrt{2}$ och $AP=\sqrt{3}$). Då vidare $AP=PA_1$, så får man ur likformiga trianglar $A_1B_2=2$ och $AB_1=B_1B_2=B_2C=x$, dvs. $AC=3x$, varav $AB=AC$. Slutligen $AB:2A_1B=AP:2B_1P=\sqrt{3}:2$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie bilda första termen, summan och kvoten, tagna i nu nämnd ordning, en aritmetisk serie. Summan av termerna med udda ordningsnummer är −6. Hur stor är summan av termerna med jämna ordningsnummer?
2. Lös ekvationen $\operatorname{tg} 4x=4\operatorname{tg} x$.
3. Konstruera kurvan $y=x^3-5x^2+7x$ med angivande av eventuella maximi- och minimipunkter. Bestäm därefter ekvationerna för de tangenter, som gå genom origo.
4. En sfär delas av ett plan i två segment, vilkas totala begränsningsytor förhålla sig som 1 : 2. Bestäm det exakta värdet av förhållandet mellan segmentens volymer, förenkla det så långt som möjligt, och beräkna det därefter approximativt.
5. I triangeln ABC är AB 15 cm, BC 13 cm och CA 7 cm samt P en rörlig punkt på sidan AB. På förlängningen av sidan AC åt C till avsättes sträckan $CQ=BP$. Bestäm ytan av triangeln APQ, när sträckan PQ är så liten som möjligt. Visa därefter, att det erhållna värdet är ett maximivärde för ytan av triangeln APQ.
6. I parallelltrapetset $ABCD$ äro sidorna AB och DC parallella. Hörnen B och C äro belägna i punkterna (5; 3) respektive (3; −5). Mittpunkten på AD är (−4; 7). Om de icke parallella sidorna utdragas,

tills de skära varandra, blir ytan av den utanför trapetset belägna triangeln $^{9}/_{16}$ av trapetsets yta. Bestäm koordinaterna för hörnen A och D.

7. I en regelbunden tresidig pyramid är den inskrivna sfärens diameter hälften så stor som baskanten. Bestäm vinkeln mellan en sidoyta och basytan samt vinkeln mellan två sidoytor.
8. Upprita i samma koordinatsystem kurvorna $16y=x^3+3x^2-9x-27$ och $64y=3x^5-50x^3+135x-216$ i deras huvuddrag. Visa, att den förstnämnda kurvans maximi- och minimipunkter sammanfalla med maximipunkterna för den senare kurvan. Den räta linjen $x=a$ skär kurvorna i punkterna A och B. Undersök och åskådliggör i ett särskilt koordinatsystem, hur längden av sträckan AB varierar, när a antar alla reella värden. Ange x-koordinaterna för de punkter, för vilka längden av AB har maximum eller minimum.

Resultat: **1.** 4. **2.** $n\cdot 180°$, $\pm 65{,}90°+n\cdot 180°$. **3.** Max. i (1; 3), min. i $(2\frac{1}{3}; 1\frac{2}{27})$. Tangenternas ekv. äro $7x-y=0$ och $3x-4y=0$. **4.** $(\sqrt{243}-10):26=0{,}2149$. **5.** Om $AP=x$ cm och $AQ=y$ cm, är $x+y=22$ och $PQ^2=x^2+y^2-2xy\cos A\equiv(x+y)^2-2xy(1+\cos A)$. Min. för PQ inträffar, när (xy och) triangeln APQ har max., dvs. då $x=y=11$ cm. Detta max. är $121\sqrt{3}:4=52{,}40$ cm^2, ty $\sphericalangle A=60°$. **6.** $A(-1; 9)$ och $D(-7; 5)$ eller $A(-5; 13)$ och $D(-3; 1)$. **7.** $81{,}79°$ och $62{,}01°$ (vinklarnas cosinus är $\frac{1}{7}$ och $\frac{23}{49}$ resp.). 8. Om de högra leden i kurvornas ekvationer betecknas med $f(x)$ och $g(x)$ resp., är $f'(x)=3(x-1)(x+3)$ och $g'(x)=15(x^2-9)(x^2-1)$; $f(x)$ har max. i $(-3; 0)$, min. i $(1; -2)$; $g(x)$ har max. i $(-3; 0)$ och $(1; -2)$ samt min. i $(-1; -4\frac{3}{4})$ och $(3; -6\frac{3}{4})$. Av $z=64(y_A-y_B)=\pm 3(a^2+2a-3)^2\cdot(a-4)$, där tecknet väljes så att $z>0$, fås $z'=\pm 3(a^2+2a-3)(5a^2-10a-19)=\pm 15(a+3)(a-1)(a-a_1)(a-a_2)$, där $a_1=1-\sqrt{4{,}8}$ och $a_2=1+\sqrt{4{,}8}$. Funktionen z avtar med från $-\infty$ växande a från $+\infty$ till 0 för $a=-3$, växer till ett max. för $a=a_1$, avtar till 0 för $a=1$, växer åter till max. för $a=a_2$, avtar slutligen till 0, då $a=4$ (spets) för att sedan växa till $+\infty$.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. En punkt rör sig i ett koordinatsystem, så att dess avstånd från x-axeln är dubbelt så stort som dess avstånd från en given punkt $(a; b)$ i första kvadranten. Orten för den rörliga punkten är en andragradskurva. Bestäm dennas ekvation och excentricitet.
2. I två konvergenta oändliga geometriska serier är den första termen i vardera serien lika med kvoten i den andra serien. De båda kvoterna äro rötter till ekvationen $x^2-ax-a^2=0$. Bestäm a, så att summan av de båda seriernas summor blir så stor som möjligt.

3. Funktionen y satisfierar ekvationen $xy\cos\frac{y}{x}=C$, där C är en konstant. Visa, att sambandet $x\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)$ gäller för alla värden på C.
4. Till en hyperbel med transversalaxeln utefter y-axeln äro linjerna $4x-3y=0$ och $21x-20y=0$ konjugatdiametrar och linjen $21x-20y+17=0$ tangent. Bestäm hyperbelns ekvation.
5. Ett rektangulärt pappersark $ABCD$ är av s. k. standardformat (DIN-format), dvs. $AB=AD\sqrt{2}$. Arket vikes, så att hörnet A faller på sidan CD och vikningslinjens ändpunkter på AB och AD. Var skall A falla, för att vikningslinjen skall bli så kort som möjligt?
6. Bevisa, att för alla vinklar x mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ gälla olikheterna

$$\tfrac{1}{3}(2\sin x+\operatorname{tg} x)>x<\sin x$$

7. För att bestämma sneda asymptoter till en kurva kan man i många fall förfara på följande sätt. Tangenten till kurvan i en punkt med x-koordinaten x_1 bestämmes under formen $y=kx+l$, varefter man beräknar

$$\lim_{x_1\to\pm\infty} k \quad \text{och} \quad \lim_{x_1\to\pm\infty} l$$

Använd denna metod för att bestämma den sneda asymptoten till kurvan $y=x\sqrt{x:(x-1)}$. Konstruera därefter kurvan med angivande även av eventuella maximi- och minimipunkter samt övriga asymptoter.

Resultat: **1.** Ellipsen $\frac{1}{3}(x-a)^2+\frac{1}{4}(y-\frac{4}{3}b)^2=\frac{1}{9}b^2$ med exc. $\frac{1}{2}$. **2.** $\frac{1}{4}(3-\sqrt{5})$. Den större kvoten är $\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)$, varför $|\frac{1}{2}a(\sqrt{5}+1)|<1$, dvs. $|a|<\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. **4.** $7x^2-5y^2=-17$. **5.** A skall falla mitt på CD. — Om A faller i A_1 på CD, så är vikningslinjen mittnormal till AA_1. Sättes $AD=2a$ och $\sphericalangle DAA_1=x$, blir vikningslinjens längd $a:\sin x\cdot\cos^2 x$ osv. **6.** Om $y=2\sin x+\operatorname{tg} x$, erhålles $y'=2\cos x+1:\cos^2 x$ och $y''=2\sin x(1-\cos^3 x):\cos^3 x$. Då $y''>0$ för $x=0+\varepsilon$ men <0 för $x=0-\varepsilon$, gör $x=0$ y' till ett min.=3, dvs. kurvan befinner sig ovanför räta linjen $y=3x$, om $0<x<\frac{1}{2}\pi$; att $x>\sin x$ visas i läroböckerna. **7.** Asymptoten är $y=x+\frac{1}{2}$. — Av $y'=\frac{2x-3}{2(x-1)}\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ erhålles $k\to 1$; $\lim l=\lim(y-x)=\lim x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)$ erhålles genom förlängning med konjugatkvantiteten. Linjen $x=1$ är även asymptot. Kurvans ena gren befinner sig på undersidan av $y=x+\frac{1}{2}$ och stiger (då x växer från $-\infty$ till 0) till en slutpkt i origo, där x-axeln är tangent. På andra grenen ligger ett min. $(1{,}5;\ 1{,}5\sqrt{3})$.

Uppgifter i fysik

1. En elektriskt driven bil väger med belastning 1000 kg. Den går med den konstanta hastigheten 18 km/tim uppför en backe, vars lutning är 1 : 20. Den av batteriet utvecklade effekten är därvid 5,60 kW. Härav kommer 98 % motorn till godo, och av det senare effektbeloppet användes 85 % för bilens framdrivande. Beräkna i kp de sammanlagda friktions- och luftmotstånden mot bilens rörelse. 1 kW=102 kpm/sek.
2. En landsväg har på ett ställe en kurva med 150 m krökningsradie. Vägbanan är i kurvan gjord lutande, så att tryckkraften från fordon, som passera med hastigheten 40 km/tim, är vinkelrät mot banan. Beräkna den största hastighet, med vilken en bil kan passera kurvan utan att sladda, om friktionskoefficienten mellan hjulen och vägbanan därvid uppskattas till 0,20. Bilens tyngdpunkt får anses ligga så lågt, att ingen risk för stjälpning föreligger. Figur erfordras.
3. Följande metod är användbar för bestämning av den mekaniska värmeekvivalenten. En massiv kopparcylinder får rotera kring sin axel, som är horisontell. Ett tunt sidenband omsluter därvid den nedre halvan av cylindern. Bandets ändar spännas i vertikal led, på ena sidan med hjälp av en dynamometer och på andra sidan med ett i bandet fastknutet snöre, som lägges över en ovanför cylindern placerad trissa och i sin fritt nedhängande ända belastas med en enkilosvikt. Cylindern uppvärmes av friktionen mot bandet. Temperaturen kan avläsas på en termometer, som stuckits in i en urborrning i ena ändan av cylindern. Vid ett försök erhöllos följande data. Begynnelsetemperaturen var 22,48° C, och sedan cylindern vridits 490 varv, avlästes en sluttemperatur av 24,05° C. Dynamometern visade hela försökstiden 200 p. Kopparcylinderns vikt var 836 g, dess diameter 41,3 mm och spec. värmet 0,093 cal per g och grad. Försöket utfördes vid en rumstemperatur av +23° C, varför man kan bortse från värmeförluster till omgivningen. Enkel figur över försöksanordningen erfordras.
4. Hos en tunn, plankonvex glaslins är avståndet mellan samma sidas brännpunkter för en viss sorts röda och en viss sorts violetta centralstrålar 0,50 cm, när linsen befinner sig i luft. Hur stort blir motsvarande avstånd, om linsen nedsänkes i vatten? Glasets brytningsindex är för de röda strålarna 1,740 och för de violetta 1,810. Motsvarande värden för vatten äro resp. 1,330 och 1,344.
5. En termometer avläses med en avläsningskikare (liten keplerkikare). Objektivets brännvidd är 20 cm, okularets 2,0 cm. Avståndet mellan termometern och objektivet är vid avläsningen 100 cm.

Beräkna förhållandet mellan den synvinkel, under vilken man ser en grad på termometern genom kikaren, och den synvinkel, under vilken man ser samma sträcka med obeväpnat öga. När ögat betraktar termometern i kikare, förutsättes bilden falla på stort avstånd; en direkt avläsning tänkes däremot ske på ett till 25 cm skattat avstånd för tydligt seende (synvidden). Figur med enkel men tydlig strålgång erfordras.

6. Vid en lärjungelaboration skulle en laborant medelst grova kopparträdar koppla tre Nife-ackumulatorer parallellt med varandra till ett batteri. Han råkade emellertid av misstag vända polerna hos en av dem åt fel håll. Beräkna styrkan av de strömmar, som härigenom i första ögonblicket uppkommo inom batteriet. Varje ackumulator har elektromotoriska kraften 1,25 V och inre motståndet 0,05 ohm. Kopplingsschema med strömpilar erfordras.
7. En person ville mäta storleken av ett motstånd X. Han inkopplade det för den skull i en strömkrets, bestående i övrigt av ett ackumulatorbatteri, ett reglerbart skjutmotstånd och en milliamperemeter. Parallellt med X inkopplade han en voltmeter. Om voltmeterns motstånd visste han ingenting. Han gick därför tillväga på följande sätt. Skjutmotståndet injusterades, så att voltmetern visade 7,00 V. Milliamperemetern angav samtidigt 214 mA. Härpå ersatte han X med ett tillgängligt precisionsmotstånd R på 20 ohm och justerade samtidigt skjutmotståndet, så att voltmetern alltjämt visade på 7,00 V. Milliamperemetern angav denna gång 367 mA. Vilket värde kunde han härav beräkna för det obekanta motståndet? Kopplingsschema erfordras.
8. Man önskade bestämma inre motståndet hos ett galvaniskt element. Av ett ackumulatorbatteri, ett variabelt motstånd och en jämntjock, homogen manganinträd AB av 1000 mm längd bildades en strömkrets, varvid A var ansluten till batteriets positiva pol. Mellan A och en längs AB rörlig kontakt C inkopplades i serie med varandra det galvaniska elementet och en galvanometer. Denna blev vid riktig inkoppling av elementet strömlös, då AC var=902 mm. Ett motstånd på 10 ohm inkopplades nu mellan elementets poler, parallellt med detta och utan att kopplingen i övrigt ändrades. För att nu åstadkomma, att galvanometern blev strömlös, måste C flyttas 22 mm från sitt förra läge. Beräkna elementets inre motstånd. Kopplingsschema med utsatta poler och strömpilar erfordras.

Resultat: 1. 45 kp. 2. 74 km/tim. 3. 420 kpm/kcal. 4. 1,54 cm. 5. $3\frac{1}{8}$. 6. $16\frac{2}{3}$, $16\frac{2}{3}$ och $33\frac{1}{3}$ A. 7. 35,5 ohm. 8. 0,25 ohm.

NYTT i matematik

Erik Odelius

Övningsuppgifter i algebra, planimetri och stereometri för realskolan (3^5—5^5 och 2^4—4^4)

Föreliggande exempelsamling är ämnad att avhjälpa bristen på lämpliga övningsuppgifter i matematik. Den är avsedd att användas i realskolans tre sista klasser framför allt vid hemarbetet. Den kan således även ersätta de exempelsamlingar, som innehåller uppgifter givna vid det matematiska provet i realexamen.

Boken kostar 3 kr 75 öre, lärarexemplar med 25% rabatt

Einar Öije

Rabatt — Pålägg — Vinst

100 problem till realskolans matematikkurs

Ur författarens förord: »icke endast en stödkurs för svagare lärjungar utan på samma gång ett bidrag till avhjälpande av bristen på övningsexempel, anpassade efter den numera påbjudna nomenklaturen för affärsproblem inom realskolan. Den innehåller därför både helt lätta och svårare exempel, ordnade efter sitt innehåll och ej efter svårighetsgrad».

Boken kostar 1 kr 95 öre, lärarexemplar med 25% rabatt

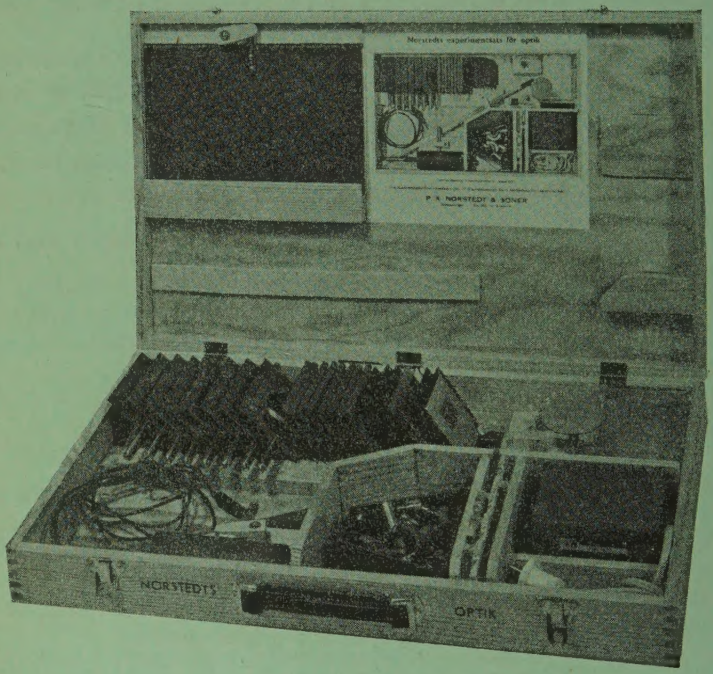
SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN
David Bagaresgata 20 · Stockholm
Tel. 21 82 22 · Postgiro 551 60

Utställning även Parkgatan 19, Göteborg

Utställning
Lärarexemplar
Rekvisitioner

Norstedts experimentsats för optik



Pris inkl. förvaringslåda av trä och en utförlig handledning med beskrivning av varje försök kronor 285: —

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen — Box 898 — Stockholm

LUND 1953, HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI